

**THE TEXT IS
LIGHT IN
THE BOOK**

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS.

TOME II. — I^{re} PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

(Tous droits réservés.)

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE XIV.

LE PROBLÈME DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

211. On se rappelle quel est le principe de la méthode de la variation des constantes que nous avons exposée au Chapitre IV, Tome I. On adopte comme variables indépendantes l'un des systèmes que nous avons appelés *systèmes de variables képlériennes*, par exemple le système des variables L, λ, ξ, η (*Cf.* n^{os} 56, 57, 78, 79).

On arrive ainsi aux équations (4 bis) du n^o 93

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = -\mu \frac{dF_1}{d\lambda}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \mu \frac{dF_1}{d\xi}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\mu \frac{dF_1}{d\eta}, \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dF_0}{dL} + \mu \frac{dF_1}{dL}. \end{array} \right.$$

Les fonctions F_0 et F_1 ont été définies aux n^{os} 36 et suivants; la première est très simple, la seconde est ce qu'on appelle la *fonction perturbatrice*.

Nous avons vu aux n^{os} 83 et 99 que cette fonction peut se développer sous la forme

$$(2) \quad \mu F_1 = \sum A \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + h) \mathfrak{M},$$

où k_1 et k_2 sont des entiers, où A et h dépendent seulement des L et où \mathfrak{M} est un monome entier par rapport aux ξ et aux η .

D'après la méthode de Lagrange, il faut alors :

1° En première approximation, regarder toutes les variables képlériennes comme des constantes, sauf les λ qui seront des fonctions linéaires du temps : on aura ainsi

$$(3) \quad L_i = L_i^0, \quad \xi_i = \xi_i^0, \quad \eta_i = \eta_i^0, \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0.$$

On aura d'ailleurs

$$F_0 = -\frac{M_1}{2L_1^2} - \frac{M_2}{2L_2^2}, \quad n_i(L_i^0)^3 = M_i$$

(Cf. nos 82 et 97).

2° En seconde approximation, remplacer les variables par leurs valeurs (3) dans toutes les dérivées partielles de F_1 , de sorte que les termes des équations (1) où figurent ces dérivées deviennent des fonctions connues du temps. Les équations (1) s'intègrent alors facilement par quadratures.

3° En troisième approximation, remplacer dans les dérivées de F_1 les variables par leurs valeurs de seconde approximation et intégrer de nouveau les équations (1) par quadratures, et ainsi de suite.

Généralement la seconde approximation suffit. Si l'on remplace la fonction F_1 par son développement (2) et qu'on procède à cette seconde approximation, on trouve tout de suite

$$\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \sum \frac{k_i}{v} A \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + h) \mathfrak{M}, \\ \eta_i &= \eta_i^0 + \sum \frac{A}{v} \sin(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + h) \frac{d\mathfrak{M}}{d\eta_i}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

de sorte que le problème des perturbations planétaires (au moins jusqu'à la seconde approximation inclusivement) serait entièrement résolu, si l'on connaissait le développement (2).

Or nous avons bien montré que le développement (2) est possible, mais nous n'avons pas fait voir comment on pouvait effectivement l'obtenir. Ce dernier problème, dont on comprend aisément

l'importance, va maintenant nous occuper, et je veux seulement, dans ce Chapitre, montrer sous quelles formes diverses il se présente.

212. Nous avons vu au Chapitre II que la fonction perturbatrice pouvait être mise sous trois formes différentes qui sont celle des n^{os} 26 et 43, celle des n^{os} 30 et 38, celle du n^o 44.

Dans ces trois cas, nous avons décomposé la fonction perturbatrice en deux parties, la *partie principale* et la *partie complémentaire*.

Au n^o 38, nous avons écrit la partie principale sous la forme

$$(4) \quad m_1 m_2 \left[\frac{1}{\sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2}} \right];$$

au n^o 43, de même qu'au n^o 44, sous la forme

$$(5) \quad - m_1 m_2 \frac{1}{\sqrt{(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2}}.$$

Il est aisé de passer d'une de ces expressions à l'autre; elles ne diffèrent en effet que du premier terme de la parenthèse (4).

Or ce terme ne dépend que des coordonnées x_4' , x_5' , x_6' de l'une des deux planètes fictives; le développement peut en être obtenu aisément ainsi que nous le verrons dès le Chapitre prochain.

Passons à la partie complémentaire de la fonction perturbatrice; si nous adoptons les variables du n^o 30, nous avons trouvé au n^o 38 l'expression de cette partie complémentaire et nous avons exposé ensuite, dans le même n^o 38, comment on pouvait passer du développement de la partie principale à celui de la fonction perturbatrice complète, et, par conséquent, à celui de la partie complémentaire. Nous reviendrons sur ce point.

Si nous adoptons au contraire les variables du n^o 26, la partie complémentaire a une expression plus simple et elle s'écrit comme nous l'avons vu au n^o 43 :

$$(6) \quad T_3 = \frac{1}{m_1} (y_1' y_4' + y_2' y_5' + y_3' y_6').$$

Si enfin on adopte les variables usuelles, c'est-à-dire celles du n^o 44, la partie complémentaire n'est plus la même pour les deux

planètes. Pour l'une, elle s'écrit

$$(7) \quad \frac{m_1 m_2}{BC^3} (x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

et, pour l'autre,

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{m_1 m_2}{AC^3} (x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

Nous verrons plus loin que le développement des expressions (6), (7), (7 bis) est très aisé.

Le problème se trouvera donc ramené au développement de l'expression (5) et c'est cette question qui nous retiendra le plus longtemps. Nous aurons ensuite à voir comment on peut passer du développement de (5) à celui de la partie complémentaire sous ses diverses formes et quelles relations il y a entre les développements des diverses expressions (5), (6), (7), (7 bis).

213. Nous avons défini au n° 59 quatre systèmes de variables képlériennes; ce sont :

1° Le système des éléments *elliptiques*

$$a, e, i, l, g + \theta, \theta;$$

2° Le premier système d'éléments canoniques

$$L, G, \theta, l, g, \theta;$$

3° Le deuxième système d'éléments canoniques

$$L, \rho, \lambda, \omega;$$

4° Le troisième système d'éléments canoniques

$$L, \xi, \lambda, \eta.$$

Selon que l'on adoptera l'un ou l'autre de ces systèmes de variables, le développement de la fonction perturbatrice sera évidemment différent. Heureusement il est aisé de passer d'un développement à l'autre.

Si l'on adopte l'un des systèmes d'éléments canoniques comme nous l'avons fait dans tout le Tome I, on a cet avantage que les équations du problème conservent la forme canonique.

Cependant les astronomes emploient plus communément les éléments elliptiques. Les équations, alors, perdent leur forme canonique. Néanmoins, ainsi que nous l'avons exposé au n° 81, les équations se présentent toujours sous la forme suivante :

Les dérivées par rapport à t des éléments elliptiques s'exprimeront linéairement à l'aide des dérivées partielles de F par rapport aux éléments elliptiques, les coefficients étant des fonctions connues des éléments elliptiques.

J'ajouterai que dans ces coefficients, fonctions connues des éléments elliptiques, figureront seulement les éléments

$$\alpha, e, i, g + \theta, \theta,$$

qui sont des constantes en première approximation, tandis que l'anomalie moyenne l , qui, en première approximation, varie proportionnellement au temps, ne figurera pas.

Les équations ainsi obtenues pourront s'appeler les *équations de Lagrange*.

Dans le cas des variables canoniques et des équations canoniques, nous n'avons dans le second membre *qu'une seule* des dérivées partielles de la fonction F et elle est affectée seulement du coefficient ± 1 ou -1 . Au contraire, dans le cas des variables elliptiques et des équations de Lagrange, nous avons, dans le second membre, plusieurs dérivées partielles de F et elles sont affectées d'un coefficient qui dépend lui-même des éléments elliptiques. Nous ne transcrivons pas ici les équations de Lagrange; nous nous bornerons, comme au n° 81, à renvoyer à l'Ouvrage de Tisserand (t. I, p. 187).

Tout ce que nous avons établi dans le Tome I, en nous servant des équations canoniques, aurait pu évidemment être démontré en partant des équations de Lagrange, mais les démonstrations auraient été fort allongées par la longueur des écritures, sans que rien y soit changé d'essentiel. De même, dans la pratique du calcul, l'emploi des équations canoniques épargnerait bien des longueurs, mais la différence ne commencerait à devenir très sensible qu'à la troisième approximation, tandis qu'on s'arrête d'ordinaire à la seconde.

Quoi qu'il en soit, il arrive que les éléments elliptiques étant

plus familiers aux astronomes et plus anciennement employés, la plupart des travaux relatifs au développement de la fonction perturbatrice ont été exécutés avec ces éléments. Il n'aurait peut-être pas été plus difficile de les faire directement en se servant des éléments canoniques, si on les avait adoptés tout d'abord. Mais aujourd'hui ce serait refaire un travail qui a déjà été fait une fois et il vaut mieux utiliser les résultats obtenus par nos devanciers.

Heureusement, comme je l'ai dit, il est aisé de passer du développement procédant suivant les éléments elliptiques à celui qui procède suivant l'un ou l'autre des systèmes d'éléments canoniques.

Nous ferons peu d'usage du premier système d'éléments canoniques; en effet, si les excentricités et les inclinaisons sont très petites, il arrive que quelques-unes des variables du deuxième et du troisième systèmes canoniques sont également très petites. La même chose n'arrive pas avec le premier système, qui est ainsi peu applicable à des méthodes d'approximation où la petitesse des excentricités et des inclinaisons joue un rôle capital.

C'est ce qui nous engage à le rejeter.

En revanche, nous serons obligés de considérer un autre système de variables elliptiques

$$a, \quad e, \quad i, \quad u, \quad g + \theta, \quad \theta,$$

où l'anomalie moyenne l est remplacée par l'anomalie excentrique u .

L'emploi de ces variables se prête mal à l'intégration, bien que Hansen en ait fait quelque usage. En revanche, le développement procédant suivant ces nouvelles variables est beaucoup plus facile que celui qui procède suivant les variables elliptiques ordinaires. Il est aisé de passer de l'un à l'autre et c'est par l'intermédiaire du premier développement qu'il est le plus commode de parvenir au second. C'est ce qui justifie l'étude détaillée que nous ferons de ce premier développement.

Nous aurons donc à étudier quatre développements de la fonction perturbatrice procédant :

1° Suivant les variables

$$(8) \quad a, \quad e, \quad i, \quad u, \quad g + \theta, \quad \theta;$$

2° Suivant les variables elliptiques

$$a, e, i, l, g - \theta, \theta,$$

ou, si l'on aime mieux, puisque

$$\lambda = l - g - \theta,$$

suivant les variables elliptiques

$$(9) \quad a, e, i, \lambda, g + \theta, \theta;$$

3° Suivant les variables canoniques

$$(10) \quad L, \varphi_i, \lambda, \omega_i;$$

4° Suivant les variables canoniques

$$(11) \quad L, \xi_i, \lambda, \eta_i,$$

et nous aurons principalement à rechercher comment on peut passer d'un de ces développements à un autre.

214. La fonction perturbatrice va donc se développer sous la forme

$$(12) \quad \sum B \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2) + \sum C \sin(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2),$$

si l'on adopte l'un des systèmes (9), (10) et (11), k_1 et k_2 étant des entiers, λ_1 et λ_2 les longitudes moyennes. Quant aux coefficients B et C , ce sont des fonctions des autres variables, c'est-à-dire des éléments osculateurs $a, e, i, g + \theta, \theta$ des deux planètes, ou bien des L , des φ et des ω , ou bien encore des L , des ξ et des η .

Si l'on adoptait les variables (9), le développement se présenterait sous la forme

$$(13) \quad \sum B' \cos(k_1 u_1 + k_2 u_2) + \sum C' \sin(k_1 u_1 + k_2 u_2),$$

où u_1 et u_2 sont les anomalies moyennes et où B' et C' sont des fonctions des éléments

$$a, e, i, g + \theta, \theta.$$

Le problème consiste à déterminer ces fonctions B , C , B' , C' ; mais on peut l'envisager de bien des manières :

1° On peut chercher à développer ces fonctions suivant les puissances des e et des i , si l'on prend les variables (9); suivant celles des φ si l'on prend les variables (10); suivant celles des ξ et des η si l'on prend les variables (11) et envisager séparément les différents termes du développement.

On a alors l'avantage d'obtenir des formules analytiques valables une fois pour toutes et que l'on peut appliquer ensuite à un cas particulier quelconque, pourvu que les excentricités et les inclinaisons soient assez petites.

La question qui se pose est alors celle des conditions de convergence de ces développements et c'est une de celles que nous aurons à examiner.

2° On peut se proposer seulement de déterminer, pour deux planètes particulières, les valeurs numériques de ces fonctions et de quelques-unes de leurs dérivées.

Le nombre des termes à calculer se trouve ainsi considérablement diminué, de sorte que le travail est notablement allégé, surtout si l'on ne doit pas pousser trop loin l'approximation.

A ce point de vue, la question la plus importante sera de déterminer une limite supérieure de chaque coefficient, afin de laisser de côté les termes dont le coefficient serait certainement trop petit.

3° On peut enfin étudier les propriétés analytiques de ces fonctions, en vue précisément de faciliter le calcul numérique dont il vient d'être question.

Nous verrons que ces fonctions satisfont à des équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des L , ξ et η , ou encore des

$$\alpha, \quad e, \quad \tan \frac{i}{2}, \quad \tan \frac{\xi}{2}, \quad \tan \frac{\theta}{2}.$$

Nous verrons également qu'il y a entre ces fonctions de remarquables relations de récurrence.

215. J'ai dit que ce qui nous arrêterait le plus longtemps, c'est

le développement de la partie de la fonction perturbatrice qui est de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{D}},$$

où

$$D = (x'_1 - x'_2)^2 + (x'_2 - x'_3)^2 + (x'_3 - x'_1)^2.$$

Mais nous serons amenés à développer non seulement $\frac{1}{\sqrt{D}}$, mais encore

$$\frac{1}{\sqrt{D^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{D^5}}, \quad \dots$$

Voici pourquoi: je suppose que les coordonnées des planètes et, par conséquent, D , dépendent d'une quantité très petite α (par exemple l'excentricité), et que nous voulions développer suivant les puissances de cette quantité α .

Soit D_0 ce que devient D pour $\alpha = 0$, et posons

$$D = D_0 + \varepsilon.$$

Nous allons d'abord chercher à développer suivant les puissances de ε et il sera aisé ensuite de passer au développement suivant les puissances de α ; on trouve ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D_0}} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{D_0^3}} + \frac{3\varepsilon^2}{8} \frac{1}{\sqrt{D_0^5}} - \dots$$

On voit que dans le second membre figurent non seulement $\frac{1}{\sqrt{D_0}}$, mais $\frac{1}{\sqrt{D_0^3}}$, $\frac{1}{\sqrt{D_0^5}}$,

Ce n'est pas tout. Dans les équations canoniques (4 bis) et (5 bis) du n° 93, par exemple, figurent, non pas la fonction perturbatrice elle-même, mais les dérivées partielles de cette fonction. Or, si la fonction perturbatrice contient un terme en $\frac{1}{\sqrt{D}}$, la différentiation introduira dans ses dérivées un terme en $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$.

Supposons maintenant qu'on veuille pousser au delà de la deuxième approximation; les seconds membres de nos équations prendront, comme nous l'avons vu au n° 100 (t. I, p. 122), la forme

$$\sum B \mathfrak{A} \pi'.$$

où les B seront des dérivées partielles de la fonction perturbatrice, qui cette fois ne seront plus du premier ordre, mais d'ordre quelconque, ce qui amènera, non plus seulement un terme $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$, mais des termes en $\frac{1}{\sqrt{D^5}}, \dots$

Voilà donc deux raisons différentes qui nous obligent à étudier le développement de $\frac{1}{\sqrt{D^3}}, \frac{1}{\sqrt{D^5}}$, en même temps que celui de $\frac{1}{\sqrt{D}}$.

216. Reprenons les formules (12) et considérons le développement de B ou de C suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. Soit m le degré de l'un quelconque des termes de ce développement.

Nous avons vu au Tome I que m est au moins égal à $|k_1 - k_2|$ et de même parité que $|k_1 - k_2|$.

Or, si les excentricités et les inclinaisons sont petites, un terme est d'autant plus petit que son degré est plus élevé. On aura donc une bonne approximation de B ou de C en se bornant aux termes dont le degré est précisément $|k_1 - k_2|$. L'ensemble des termes constituera ce que nous pourrions appeler la *partie principale* du coefficient B ou C. Il sera intéressant de chercher ce que devient la fonction perturbatrice quand on réduit chacun des coefficients de la formule (12) à sa partie principale.

Ce que nous venons de dire s'applique encore si, au lieu de développer suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons, on développe suivant celles des ξ et des η .

217. Il arrive quelquefois qu'on est obligé, dans la fonction perturbatrice, de calculer un terme de degré élevé, sans avoir à calculer les termes de degré inférieur. En général, les coefficients des divers termes vont en décroissant très rapidement à mesure que le degré s'élève; mais il peut arriver qu'un terme dont le coefficient est très petit ait néanmoins une grande importance, parce que l'intégration introduit des petits diviseurs grâce auxquels un petit terme produit parfois une perturbation considérable.

Supposons que nous ayons, dans la fonction perturbatrice, un terme

$$B \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2),$$

et que les entiers k_1 et k_2 soient très grands, mais de telle façon que le rapport $-\frac{k_1}{k_2}$ soit voisin du rapport des moyens mouvements $\frac{n_2}{n_1}$. Alors la différence $|k_1 - k_2|$ et, par conséquent, le degré du terme, seront très élevés; le coefficient B sera, par conséquent, très petit, mais, en revanche, le petit diviseur $k_1 n_1 + k_2 n_2$ sera également très petit, de sorte que, finalement, la perturbation pourra être très notable.

Le calcul exact du coefficient B serait alors très long, parce qu'il exigerait le calcul préalable des termes précédents qui ne sont pas directement utiles. On peut l'éviter, en se servant des formules approchées applicables seulement aux termes de degré élevé et fondées sur les propriétés des fonctions de très grands nombres, soit que ces formules donnent d'emblée une approximation suffisante, soit qu'elles permettent seulement de reconnaître si le terme en question est sensible, et si, par conséquent, on doit prendre la peine de le calculer exactement.

218. Nous aurons à examiner spécialement différents cas particuliers, dont les principaux sont :

- 1° Celui où les excentricités et les inclinaisons sont nulles;
- 2° Celui où les excentricités seulement sont nulles; dans ces deux cas, la distinction entre l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique et, par conséquent, entre les deux développements (12) et (13), n'a plus de raison d'être;
- 3° Celui où les inclinaisons sont nulles.

Un autre cas particulier qui méritera notre attention est celui de la Lune; le rapport des grands axes étant alors très petit, on a avantage à développer suivant les puissances de ce rapport, et il en résulte une forme particulière du développement.

J'ajoute que les théories de la Lune étant très nombreuses, les formes de développement qui ont été proposées dans le cas de cet astre le sont également, et nous aurons sans doute l'occasion d'en dire quelques mots.

219. Nous avons déjà eu l'occasion, outre le développement (12)

qui procède suivant les anomalies moyennes, d'envisager le développement (13) qui procède suivant les anomalies excentriques.

Ce dernier développement a été employé par Hansen, qui s'est aussi servi de développements procédant suivant l'anomalie excentrique de l'une des planètes et l'anomalie moyenne de l'autre.

D'autre part, Gylden a employé des développements procédant suivant les anomalies vraies.

Quand on prend, comme l'ont fait ces astronomes, pour variable indépendante l'anomalie, soit vraie, soit excentrique, de l'une des planètes, on est obligé à certaines transformations souvent assez longues et compliquées.

En effet, il y a entre les anomalies vraie et excentrique d'une planète et l'anomalie moyenne de cette même planète des relations assez simples et bien connues. D'autre part, les anomalies moyennes des deux planètes sont liées par une relation linéaire.

Au contraire, la relation qui lie les deux anomalies excentriques (ou bien encore celle qui lie les deux anomalies vraies) est comparativement compliquée.

Si donc on a développé la fonction perturbatrice suivant les deux anomalies excentriques (ou vraies) et qu'on veuille ensuite tout exprimer à l'aide de la variable indépendante qui sera l'anomalie excentrique (ou vraie) de l'une des deux planètes, il faut remplacer, dans le développement, la seconde anomalie excentrique (ou vraie) par son expression en fonction de la première, et cela donne lieu à des difficultés de calcul dont nous dirons quelques mots.

220. Dans les équations canoniques, ce n'est pas la fonction perturbatrice qui figure directement, mais ses dérivées partielles du premier ordre. C'est donc le développement de ces dérivées qui serait surtout intéressant.

Quand le développement de la fonction perturbatrice est donné sous la forme analytique, et surtout sous la forme d'une série procédant suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons, ou suivant celles des ξ et des η , on passe immédiatement d'un développement à l'autre.

Mais il n'en est pas de même quand on s'est borné à déterminer

la valeur numérique des coefficients, comme nous l'avons expliqué au n° 214: il faut alors recommencer le travail pour chacune des dérivées.

C'est ce qui a amené certains astronomes à préférer aux équations canoniques ou même à celles de Lagrange une autre forme d'équations. Ils ont remarqué en effet que ces dérivées partielles sont au nombre de *six*; on peut au contraire former des équations dans les seconds membres desquelles figurent, non les *six* dérivées partielles de la fonction perturbatrice, mais les *trois* composantes de la force perturbatrice, soit suivant les trois axes de coordonnées, soit suivant le rayon vecteur et deux perpendiculaires à ce rayon, l'une dans le plan de l'orbite, l'autre perpendiculaire à ce plan. On n'a plus alors à faire que trois développements au lieu de six.

C'est qu'en effet les six dérivées partielles ne sont pas indépendantes; il y a, entre elles et la fonction perturbatrice elles-même, certaines relations, il y en a encore entre ces dérivées et les trois composantes de la force, prises de l'une des deux manières que je viens de dire.

On peut donc se proposer de former ces relations et de montrer comment on peut s'en servir pour déduire tous les développements de l'un d'entre eux, par exemple de celui de la fonction perturbatrice.

Cette revue rapide montre sous combien de faces différentes peut se présenter le problème du développement de la fonction perturbatrice qui va faire l'objet des Chapitres suivants.



CHAPITRE XV.

APPLICATION DES FONCTIONS DE BESSEL.

221. La première chose à faire est d'exprimer les coordonnées rectangulaires ou polaires des planètes en fonctions de l'un quelconque des systèmes d'éléments osculateurs canoniques ou elliptiques, définis aux n^{os} 59 et 213.

Nous avons vu, au n^o 65 et aux numéros suivants, que les coordonnées sont développables suivant les puissances des ξ et des η et nous avons étudié quelques-unes des propriétés de ces développements. Mais il y a lieu de pousser cette étude plus loin et nous commencerons par former les développements des coordonnées en fonctions des éléments elliptiques

$$(1) \quad \alpha, \quad e, \quad i, \quad \lambda, \quad g + \theta, \quad \theta,$$

Nous supposerons même d'abord que l'on a pris pour plan des $x_1 x_2$ le plan de l'orbite, pour axe des x_1 le grand axe; de telle façon que l'inclinaison i soit nulle, de même que la longitude du périhélie $g + \theta$, et que la longitude moyenne λ soit égale à l'anomalie moyenne l . Dans ces conditions nos coordonnées ne dépendent plus de la longitude du nœud θ , de sorte que nous n'avons plus qu'à exprimer ces coordonnées en fonctions de

$$\alpha, \quad e, \quad l = \lambda.$$

Dans ces conditions on a en introduisant l'anomalie excentrique u :

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha(\cos u - e), & x_2 &= \alpha \sin u \sqrt{1 - e^2}, & x_3 &= 0, \\ l &= u - e \sin u. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer x_1 et x_2 en fonctions de l , mais

pour cela nous avons besoin de rappeler d'abord les propriétés des fonctions de Bessel dont nous allons être amenés à faire usage.

222. Considérons l'expression

$$F = E^{x \sin u},$$

où j'ai représenté par E la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour $m = \infty$, afin d'éviter toute confusion avec e qui représente l'excentricité.

Cette fonction F est une fonction périodique de u , développable d'après la méthode de Fourier en série procédant suivant les exponentielles

$$E^{imu},$$

où m est un entier positif ou négatif. Les coefficients sont des fonctions de x , de sorte que je puis écrire

$$(3) \quad E^{x \sin u} = \sum J_m(x) E^{imu}.$$

Les fonctions $J_m(x)$ s'appellent les *fonctions de Bessel*. Le premier membre de (3) est le produit des deux exponentielles

$$\begin{aligned} E^{\frac{x}{2} E^{iu}} &= \sum \left(\frac{x}{2} E^{iu}\right)^{\alpha} \frac{1}{\alpha!}, \\ E^{-\frac{x}{2} E^{-iu}} &= \sum \left(-\frac{x}{2} E^{-iu}\right)^{\beta} \frac{1}{\beta!}, \end{aligned}$$

d'où, par multiplication,

$$F = \sum \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} \frac{(-1)^{\beta}}{\alpha! \beta!} E^{iu(\alpha-\beta)}.$$

Pour avoir J_m , il faut chercher dans le second membre les termes en E^{imu} , c'est-à-dire faire $\alpha = \beta + m$. Nous trouvons ainsi

$$(4) \quad J_m(x) = \sum \frac{(-1)^{\beta}}{\beta! \beta + m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\beta}.$$

Si m est positif ou nul, il faut donner à β les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots,$$

et appliquer la formule en supposant

$$0! = 1! = 1.$$

On voit alors que $J_m(x)$ est une fonction entière de x , divisible par x^m : la série (4) converge en effet très rapidement pour toutes les valeurs de x .

Si m est négatif, il faut donner à β les valeurs

$$-m, -m+1, -m+2, \dots,$$

de façon que x soit positif ou nul. Alors $J_m(x)$ est encore une fonction entière de x divisible cette fois par x^{-m} .

Observons d'ailleurs que le développement (4) ne contient que des termes de degré pair si m est pair, de degré impair si m est impair. On a donc

$$(5) \quad J_m(-x) = (-1)^m J_m(x).$$

Si d'autre part, dans la formule (3), nous changeons x en $-x$ et u en $-u$, elle devient

$$(3 \text{ bis}) \quad E^{ix \sin u} = \sum J_m(-x) E^{-im u}.$$

En identifiant les deux développements (3) et (3 bis) de $E^{ix \sin u}$, on trouve

$$J_{-m}(x) = J_m(-x),$$

d'où

$$(6) \quad J_{-m} = (-1)^m J_m,$$

formule qui permet de ne considérer que des fonctions de Bessel d'indice positif.

223. Différentions l'équation (3) par rapport à u , il vient

$$ix \cos u E^{ix \sin u} = \sum im J_m E^{im u}$$

ou

$$\frac{x}{2} (E^{iu} + E^{-iu}) \sum J_m E^{im u} = \sum m J_m E^{im u}.$$

En identifiant les coefficients de $E^{im u}$ dans les deux membres il vient

$$(7) \quad x(J_{m-1} + J_{m+1}) = 2m J_m,$$

relation de récurrence entre trois fonctions de Bessel consécutives.

Différentions maintenant l'équation (3) par rapport à x , il viendra

$$(8) \quad i \sin u E^{ix \sin u} = \sum J'_m(x) E^{imu}$$

ou

$$(E^{iu} - E^{-iu}) \sum J_m E^{imu} = 2 \sum J'_m E^{imu},$$

ou en identifiant les deux membres

$$(9) \quad 2 J'_m = J_{m-1} - J_{m+1},$$

formule qui permet de calculer la dérivée de J_m .

224. Différentions maintenant la formule (3) deux fois par rapport à u , ou bien encore deux fois par rapport à x , nous obtenons ainsi les deux formules

$$(10) \quad -ix \sin u E^{ix \sin u} - x^2 \cos^2 u E^{ix \sin u} = -\sum m^2 J_m E^{imu},$$

$$(11) \quad -\sin^2 u E^{ix \sin u} = \sum J''_m(x) E^{imu}.$$

Ajoutons maintenant les quatre formules (3), (8), (10), (11) après les avoir respectivement multipliées par

$$x^2, \quad +x, \quad 1, \quad x^2;$$

il viendra

$$\sum [x^2 J''_m + x J'_m + (x^2 - m^2) J_m] E^{imu} = 0;$$

d'où

$$(12) \quad x^2 J''_m + x J'_m + (x^2 - m^2) J_m = 0,$$

équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle satisfait la fonction de Bessel J_m .

225. Bien que la série (4) converge très rapidement pour toutes les valeurs de x , il peut y avoir intérêt à rechercher une valeur approchée de la fonction J_m pour x très grand. Nous avons par la formule de Fourier

$$2\pi J_m = \int_0^{2\pi} E^{ix \sin u} E^{-imu} du,$$

ou en posant

$$\sin u = z,$$

$$(13) \quad \pi J_m = \int_{-1}^{+1} E^{ixz} E^{-imu} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Supposons x réel, positif et très grand. Au lieu de faire l'intégration le long de la droite qui joint le point $z = -1$ au point $z = 1$, c'est-à-dire en donnant à z des valeurs réelles, nous pouvons la faire le long d'un autre chemin ayant mêmes extrémités.

Nous choisirons un chemin tel que la partie imaginaire de z soit constamment positive, sauf bien entendu aux deux extrémités $z = \pm 1$. Dans ces conditions ixz a sa partie réelle négative et très grande, et E^{ixz} est très petit. Les seules parties du chemin d'intégration qui pourront donner des termes sensibles sont donc les parties voisines des deux extrémités, parce qu'aux extrémités, z devient réel et que la partie réelle de ixz devient nulle.

Mais près de l'extrémité $z = 1$: nous avons sensiblement

$$u = \frac{\pi}{2}, \quad E^{-imu} = E^{-im\frac{\pi}{2}}, \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{2(1-z)}.$$

Près de l'extrémité $z = -1$; nous avons sensiblement

$$u = -\frac{\pi}{2}, \quad E^{-imu} = E^{im\frac{\pi}{2}}, \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{2(1+z)}.$$

Mais il importe de voir quel signe il convient de donner aux radicaux. Nous devons supposer que le signe de $\sqrt{1-z^2}$ a été choisi de façon que, pour z réel et compris entre -1 et $+1$, le radical soit réel et positif. Nous pouvons supposer d'autre part que le chemin d'intégration aboutit à ses deux extrémités ± 1 par deux petits segments de droite de longueur ϵ , perpendiculaires à l'axe des quantités réelles. Ce sera d'ailleurs les seules parties de ce chemin que nous conserverons.

L'argument de $\sqrt{1-z^2}$ sera alors $\frac{\pi}{4}$ le long du segment aboutissant à $z = -1$, et $-\frac{\pi}{4}$ le long du segment aboutissant à $z = 1$. Le long du premier segment nous pourrions prendre $\arg \sqrt{z+1} = \frac{\pi}{4}$,

et le long du second $\arg \sqrt{z-1} = \frac{\pi}{4}$; nous aurons donc

$$\sqrt{1-z^2} = -i\sqrt{2}\sqrt{z-1}; \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+z},$$

d'où

$$(14) \quad \pi J_m = \int_{-1}^{-1+\varepsilon i} E^{ixz} E^{im\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{1+z}} - i \int_1^{1+\varepsilon i} E^{ixz} E^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{z-1}}.$$

Mais nous pouvons remplacer les limites supérieures $\pm 1 + \varepsilon i$ des deux intégrales par l'infini; car nous ajoutons ainsi aux chemins d'intégration des lignes le long desquelles la partie imaginaire de z est positive et notable de sorte que E^{ixz} est négligeable.

Or

$$\int_0^\infty \frac{E^{ixz} dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{i}{x}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} E^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Donc

$$\int_h^\infty \frac{E^{ixz} dz}{\sqrt{z-h}} = E^{ixh} \sqrt{\frac{\pi}{x}} E^{\frac{i\pi}{4}},$$

d'où

$$\pi J_m = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[E^{i(-x + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} + E^{i(1 - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right],$$

ou enfin

$$(15) \quad J_m = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

226. Voyons maintenant comment les transcendentes de Bessel peuvent être employées au développement des coordonnées du mouvement elliptique. Considérons l'exponentielle

$$E^{piu},$$

où p est un entier; c'est une fonction périodique de u et par conséquent aussi une fonction périodique de l . Elle est donc développable en série de Fourier sous la forme

$$\sum A_m E^{mil};$$

il s'agit de calculer le coefficient A_m ; la formule de Fourier nous donne

$$2\pi A_m = \int_{-\pi}^{+\pi} E^{piu} E^{-mil} dl.$$

Or

$$E^{-m\iota l} dl = \frac{i}{m} dE^{-m\iota l}; \quad dE^{p\iota u} = ip E^{p\iota u} du.$$

On trouve donc en intégrant par parties

$$2\pi A_m = \frac{p}{m} \int_0^{2\pi} E^{p\iota u} E^{-\iota m l} du,$$

ou à cause de l'équation de Képler

$$2\pi A_m = \frac{p}{m} \int E^{(p-m)\iota u} E^{imesinu} du.$$

Mais l'intégrale c'est évidemment au facteur 2π près le coefficient de $E^{(m-p)\iota u}$ dans le développement de $E^{imesinu}$; elle est donc égale à

$$2\pi J_{m-p}(me),$$

d'où la formule cherchée

$$(16) \quad A_m = \frac{p}{m} J_{m-p}(me).$$

227. Cette démonstration ne s'applique plus pour $m = 0$ et d'ailleurs la formule devient illusoire. On a alors

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} E^{p\iota u} dl$$

ou

$$2\pi A_0 = \int E^{p\iota u} (1 - e \cos u) du$$

ou

$$2\pi A_0 = \int \left(E^{p\iota u} - \frac{e}{2} E^{(p+1)\iota u} - \frac{e}{2} E^{(p-1)\iota u} \right) du,$$

ce qui montre que A_0 est égal à 1 pour $p = 0$, à $-\frac{e}{2}$ pour $p = \pm 1$, et à 0 pour toutes les autres valeurs de p .

228. Proposons-nous maintenant de développer suivant les exponentielles E^{iml} une fonction périodique quelconque de u

$$F(u) = \sum B_p E^{ip u},$$

et de la mettre ainsi sous la forme

$$F(u) = \sum A_m E^{iml}.$$

Les principes des deux numéros précédents nous donneront

$$(17) \quad A_m = \sum \frac{p}{m} B_p J_{m-p}(me),$$

pour $m \leq 0$ et

$$(18) \quad A_0 = B_0 - \frac{e}{2} (B_1 + B_{-1}),$$

pour $m = 0$.

Inutile d'ajouter qu'en partant de l'identité

$$E^{ip\mu} E^{iqu} = E^{i(p+q)u},$$

en y remplaçant les trois exponentielles par leurs développements et en identifiant les deux développements, on arrive à un grand nombre de relations où le premier membre est une fonction de Bessel et le second membre une série dont tous les termes sont des produits de fonctions de Bessel.

229. Grâce aux formules (17) et (18) du numéro précédent, le développement d'une fonction quelconque de u suivant les puissances de E^{iu} se déduit aisément du développement suivant les puissances de E^{iu} ; or la plupart des fonctions intéressantes relatives au mouvement elliptique s'expriment très simplement à l'aide de E^{iu} .

Supposons d'abord que nous prenions pour plan des x_1, x_2 le plan de l'orbite et pour axe des x_1 le grand axe, nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 &= a(\cos u - e) = -ae + \frac{a}{2} E^{iu} + \frac{a}{2} E^{-iu}, \\ x_2 &= a\sqrt{1-e^2} \sin u = \frac{a}{2i} \sqrt{1-e^2} (E^{iu} - E^{-iu}), \\ x_3 &= 0, \\ r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a(1 - e \cos u). \end{aligned}$$

L'application des formules (17) et (18) nous donne

$$\frac{x_1}{a} = \sum A_m E^{mil}; \quad \frac{x_2}{a} = \sum A'_m E^{mil},$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{2m} [J_{m-1}(me) - J_{m+1}(me)], \\
 (19) \quad A'_m &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2im} [J_{m-1}(me) + J_{m+1}(me)], \\
 A_0 &= -\frac{3e}{2}, \quad A'_0 = 0.
 \end{aligned}$$

Les formules de récurrence (7) et (9) nous permettent d'écrire

$$(20) \quad \begin{cases} A_m = \frac{1}{m} J'_m(me), \\ A'_m = \frac{\sqrt{1-e^2}}{iem} J_m(me). \end{cases}$$

Nous trouverions de même

$$r = a + \frac{ae^2}{2} - ae \sum \frac{J'_m(me)}{m} E^{mil}.$$

Sous le signe \sum , l'indice m prend toutes les valeurs entières positives et négatives, à l'exception de la valeur 0. Cette formule se déduit immédiatement de la relation

$$r = a(1-e^2) - ex_1.$$

Nous pourrions écrire également

$$\begin{aligned}
 \frac{x_1 + ix_2}{a} &= -e + \frac{Eiu}{2} (1 + \sqrt{1-e^2}) + \frac{E \cdot iu}{2} (1 - \sqrt{1-e^2}), \\
 \frac{x_1 - ix_2}{a} &= -e + \frac{E-iu}{2} (1 + \sqrt{1-e^2}) + \frac{Eiu}{2} (1 - \sqrt{1-e^2}),
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduirait par les formules (17) et (18) les développements de $x_1 \pm ix_2$.

230. Reportons-nous maintenant au n° 63 et aux quantités que nous y avons appelées X et Y; nous voyons que l'on aura

$$X + iY = (x_1 + ix_2)E^{-il},$$

et par conséquent, par application des formules (17) et (18),

$$(21) \quad \begin{cases} X + iY = -\frac{3ae}{2} E^{-il} + \frac{a}{2} (1 + \sqrt{1-e^2}) \sum \frac{J_{m-1}(me)}{2m} E^{i(m-1)l} \\ \quad - \frac{a}{2} (1 - \sqrt{1-e^2}) \sum \frac{J_{m+1}(me)}{2m} E^{i(m-1)l}. \end{cases}$$

On en déduirait le développement de $X - iY$ en changeant i en $-i$, et par conséquent les développements de X et de Y .

Supposons maintenant que nous rapportions notre système à des axes quelconques; les quantités auxiliaires X et Y seront toujours définies comme au n° 63 et leur développement en fonction des variables α , e et l ne changera pas. Quant aux coordonnées rectangulaires rapportées aux nouveaux axes, elles seront liées à X et Y par les équations (12) du n° 63, t. I, p. 79.

Ces formules peuvent aussi s'écrire

$$(22) \quad \begin{cases} x_1 + ix_2 = \cos^2 \frac{J}{2} (X + iY) E^{i\lambda} + \sin^2 \frac{J}{2} (X - iY) E^{-i(\lambda - 2\theta)}, \\ x_3 = \text{partie imag. de } \frac{\sin J}{2} (X + iY) E^{i(\lambda - \theta)}. \end{cases}$$

J'ai remplacé la lettre i des formules du n° 63, qui représentait l'inclinaison, par la lettre J , afin d'éviter toute confusion avec $i = \sqrt{-1}$; on obtiendrait l'expression de $x_1 - ix_2$ en changeant i en $-i$.

En rapprochant les formules (21) et (22) on trouve

$$(23) \quad \begin{cases} x_1 + ix_2 = a \cos^2 \frac{J}{2} \left[-\frac{3e}{2} E^{i(g+\theta)} \right. \\ \quad \left. + \sum \frac{E^{i(mt+g+\theta)}}{4m} (\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1}) \right] \\ \quad + a \sin^2 \frac{J}{2} \left[-\frac{3e}{2} E^{i(\theta-g)} \right. \\ \quad \left. + \sum \frac{E^{i(-mt+\theta-g)}}{4m} (\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1}) \right]. \end{cases}$$

J'ai écrit pour abrégier ε_1 et ε_2 au lieu de $1 + \sqrt{1 - e^2}$ et de $1 - \sqrt{1 - e^2}$. L'argument des fonctions de Bessel J_{m-1} et J_{m+1} est égal à me .

On trouve de même

$$(23 \text{ bis}) \quad x_3 = \frac{a \sin J}{2} \left[-\frac{3e}{2} \sin g + \sum \frac{\sin(mt+g)}{4m} (\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1}) \right].$$

231. Les développements obtenus par la méthode du n° 228 ne sont pas les seuls que l'on puisse imaginer. Supposons par

exemple que l'on veuille développer

$$\frac{du}{dl} = \frac{1}{1 - e \cos u}.$$

On pourrait évidemment développer $\frac{1}{1 - e \cos u}$ en série de Fourier et appliquer ensuite la méthode du n° 228; mais il y a quelque chose de beaucoup plus simple.

Nous avons

$$u = l + e \sin u,$$

ou, en se reportant au développement de x_2 au n° 229 et à la formule (20),

$$u = l + \frac{1}{8im} \sum J_m(me) E^{iml},$$

ou, en différentiant,

$$(24) \quad \frac{du}{dl} = 1 + \sum J_m(me) E^{iml}.$$

Ce développement nous donne en même temps celui de

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e \cos u)}.$$

Plus généralement, cela nous donne le moyen de développer les expressions de la forme

$$\frac{F(u)}{1 - e \cos u}.$$

Si, en effet, l'on a

$$F(u) = \sum C_p E^{ipu},$$

on aura

$$\frac{F(u)}{1 - e \cos u} = \frac{d}{dl} \sum \frac{C_p}{ip} E^{ipu}.$$

On développera alors $\sum \frac{C_p}{ip} E^{ipu}$ en série procédant suivant les exponentielles E^{iml} et l'on différenciera par rapport à l .

Cette méthode peut être plus avantageuse que celle du n° 228 si le développement de $F(u)$ suivant les exponentielles E^{ipu} est plus simple que celui de $\frac{F(u)}{1 - e \cos u}$, si par exemple il se réduit

à un nombre fini de termes. En particulier nous trouverons les développements de $\frac{\cos u}{r}$, $\frac{\sin u}{r}$, expressions qui sont liées à $\cos v$ et à $\sin v$ par des relations linéaires (v est l'anomalie vraie).

232. Nous pourrions aussi différentier par rapport à e ; il vient

$$(1 - e \cos u) \frac{du}{de} = \sin u.$$

Du développement d'une fonction périodique quelconque $\Phi(u)$ nous déduirons donc immédiatement celui de

$$\frac{\sin u \frac{d\Phi}{du}}{1 - e \cos u},$$

ce qui pourra être utile si le développement de $\frac{d\Phi}{du}$ est plus simple que celui de $\sin u \frac{d\Phi}{du}$. En particulier on peut calculer de cette façon

$$\frac{\sin u}{r},$$

qui ne diffère de $\sin v$ que par un facteur constant.

Mais nous pouvons également différentier deux ou plusieurs fois par rapport à l , ou au contraire intégrer par rapport à l .

Par exemple les équations du mouvement képlérien nous donnent

$$(25) \quad \frac{d^2 x_1}{dl^2} = - \frac{a^3 x_1}{r^3}.$$

Or nous connaissons les développements des coordonnées x_i , où le coefficient de chaque terme ne dépend que d'un nombre fini de fonctions de Bessel; l'équation (25) nous donnera donc celui de $\frac{x_i}{r^3}$, chaque terme ne dépendant que d'un nombre fini de fonctions de Bessel. En particulier, si nous prenons les axes du n° 229, nous connaissons les développements de

$$\frac{x_1}{r^3} = \frac{\cos v}{r^2}, \quad \frac{x_2}{r^3} = \frac{\sin v}{r^2},$$

v étant l'anomalie vraie.

Si nous multiplions chacune des équations (25) par x_i et que nous ajoutons, nous trouverons

$$(26) \quad \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \sum \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = - \frac{M}{r}.$$

Comme le second terme du premier membre de (26) est une fonction linéaire de $\frac{1}{r}$ en vertu de l'équation des forces vives, l'équation (26) nous apprend qu'il y a une relation linéaire entre $\frac{1}{r}$ et $\frac{d^2 r^2}{dt^2}$.

Or l'équation (24) nous donne le développement de $\frac{1}{r}$; nous possédons donc celui de $\frac{d^2 r^2}{dt^2}$, d'où, par une double intégration, celui de r^2 . Nous avons donc les développements de r , $\frac{1}{r}$ et r^2 .

L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires nous donne

$$e \cos \nu = \frac{a(1-e^2)}{r} - 1,$$

$$er^2 \cos \nu = a(1-e^2)r - r^2.$$

Des développements de $\frac{1}{r}$, r et r^2 nous déduirons donc ceux de $\cos \nu$ et $r^2 \cos \nu$. Nous avons d'ailleurs expliqué plus haut la façon de développer $\cos \nu$.

Tous les développements dont il vient d'être question sont tels que chaque terme ne dépend que d'un nombre fini des fonctions de Bessel. Inutile d'ajouter que, par l'emploi des relations (7), (9) et (12), on peut s'arranger pour que chaque terme ne contienne plus que

$$J_m(me) \quad \text{et} \quad J'_m(me).$$

233. Nous pourrions nous proposer de développer les coordonnées en fonction des éléments canoniques

$$L, \lambda, \rho, \omega, \xi, \eta.$$

Si nous nous reportons aux formules (23) et (23 bis) nous verrons qu'il suffit pour cela de développer les exponentielles $E^{mi\lambda}$, les expressions

$$(27) \quad a \cos^2 \frac{J}{2}, \quad e^{im} E^{\pm im(g+\theta)}, \quad \tan^2 \frac{J}{2} E^{\pm 2i\theta}, \quad \tan \frac{J}{2} e^{\pm i\theta},$$

et enfin la fonction

$$K_m = \frac{\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1}}{e^{m-1}}.$$

Les exponentielles $E^{m\tilde{t}}$ sont directement exprimées par les éléments canoniques. les expressions (27) se réduisent respectivement à

$$L^2 \frac{2L - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{L - \varepsilon_1}, \quad \frac{(\xi_1 \pm i\tau_1)^m}{L^{\frac{m}{2}}}, \quad \frac{(\xi_2 \pm i\tau_2)^2}{2L - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad \frac{\xi_2 \pm i\tau_2}{\sqrt{2L - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}},$$

en faisant abstraction de facteurs constants.

Quant à K_m il est développable suivant les puissances croissantes de

$$e^2 = 2 \frac{\varepsilon_1}{L} - \left(\frac{\varepsilon_1}{L} \right)^2,$$

et le développement se déduit aisément de celui des fonctions de Bessel. Je n'insisterai pas davantage sur ces points, me bornant à renvoyer aux n^{os} 68 à 69 du Tome I^{er}.

234. Nous observerons maintenant que si e est très petit le premier terme de chaque fonction de Bessel sera plus considérable que tous les autres. Nous pourrions nous borner alors à ce terme si nous nous plaçons au point de vue du n^o 216. En partant des formules (16) et remplaçant chaque fonction de Bessel par son développement, nous trouvons

$$(28) \quad E^{ipu} = \sum \frac{p}{m} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta! m - p + \beta!} \left(\frac{me}{2} \right)^{m-p+2\beta} E^{im\tilde{t}},$$

et en réduisant chaque fonction de Bessel à son premier terme

$$(29) \quad \sum \frac{p}{m} \left(\frac{me}{2} \right)^{m-p} \frac{E^{im\tilde{t}}}{m - p!} + \sum \frac{p}{m} \left(\frac{me}{2} \right)^{p-m} \frac{(-1)^{p-m}}{p - m!} E^{im\tilde{t}}.$$

Sous le premier signe \sum on doit donner à m toutes les valeurs entières telles que $m - p$ soit positif ou nul, et sous le second signe \sum toutes les valeurs telles que $m - p$ soit négatif.

Mais nous devons observer que l'approximation relative avec laquelle chaque fonction de Bessel est ainsi représentée est d'au-

tant plus faible que l'ordre de cette fonction est plus élevé. Et en effet le rapport du second terme au premier s'écrit ($m - p$ étant positif, par exemple)

$$\left(\frac{me}{2}\right)^2 \frac{1}{m - p + 1}.$$

Il est très petit si e est très petit et m fini; mais, quel que soit e , il croît indéfiniment avec m . Pour les termes d'ordre un peu élevé, on obtiendrait une bien meilleure approximation en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée du n° 225.

235. Le développement (28) et les développements analogues procèdent suivant les puissances de e et les exponentielles E^{iml} . Si nous les ordonnons *d'abord* suivant les exponentielles E^{iml} , le coefficient de chaque terme, étant une fonction de Bessel, pourra être développé suivant les puissances de e en une série toujours convergente; de plus, dès qu'on aura calculé les coefficients des différents termes de la série de Fourier, cette série elle-même sera toujours convergente.

Avec cette façon d'ordonner les termes, la convergence est donc assurée, mais il n'en est plus de même si l'on ordonne *d'abord* suivant les puissances de e , le coefficient de chaque terme étant lui-même une fonction de l . Nous sommes donc amenés à nous poser la question suivante :

Nous avons une fonction quelconque de u , dépendant par conséquent de e et de l , nous la développons selon les puissances de e ; quel est le rayon de convergence de la série, c'est-à-dire la valeur maximum de $|e|$ pour laquelle la série converge? Cette valeur dépend évidemment de l et je puis la désigner par $\varphi(l)$. Si alors M est la plus petite valeur de $\varphi(l)$, quand l prend toutes les valeurs *réelles* possibles, la convergence de la série sera assurée tant que e ne surpassera pas M .

Pour calculer $\varphi(l)$ et M , nous allons appliquer le théorème de Cauchy. Pour que la série cesse d'être convergente, il faut et il suffit que la fonction cesse d'être holomorphe. Or nous avons

$$l = u - e \sin u,$$

d'où

$$du(1 - e \cos u) = dl + \sin u \, de,$$

ce qui montre que u (et en général toute fonction de u) cesse d'être une fonction uniforme de e et de l pour

$$(30) \quad e = \frac{1}{\cos u}.$$

En combinant l'équation (30) avec celle de Képler, on trouve

$$(31) \quad u - \tan u = l.$$

Les équations (30) et (31) définissent e et sa valeur absolue $|e|$ en fonction de l et la plus petite des déterminations de cette valeur absolue est $\varphi(l)$.

Remarquons que $\varphi(l)$ est le même en général pour toute fonction $F(u)$; il n'y aurait d'exception que si la dérivée $\frac{dF}{du}$ s'annulait précisément pour la valeur de u qui satisfait à l'équation (31). Cela nous permettra de raisonner sur une fonction $F(u)$ quelconque, il nous suffira que la condition d'exception ne soit pas remplie.

236. Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de l pour laquelle $\varphi(l)$ atteint son minimum M . A cet effet je reprends la formule (28) et j'obtiens en la différentiant par rapport à l

$$(32) \quad \frac{E^{ipu}}{1 - e \cos u} = \sum \frac{(-1)^{\beta}}{\beta! m - p + \beta!} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta} E^{iml} = \Phi(l).$$

Cette fonction ne se trouve pas dans le cas d'exception signalé à la fin du numéro précédent, car, quand on a

$$1 - e \cos u = 0,$$

sa dérivée ne s'annule pas et devient au contraire infinie.

Les équations (30) et (31) ne changent pas quand on y change u , l et e en $u + \pi$, $l + \pi$, $-e$; il suit de là que les valeurs critiques de e qui correspondent à l et à $l + \pi$ ont même valeur absolue $\varphi(l) = \varphi(l + \pi)$, mais sont égales et de signe contraire.

Supposons donc que pour une valeur réelle l_1 de l et pour une valeur quelconque de e que j'appelle e_1 , la série (32) diverge, il en sera de même quand nous changerons l_1 en $l_1 + \pi$, et il en sera encore de même de la somme

$$\Phi(l_1) + \Phi(l_1 + \pi).$$

Considérons, en effet, $\Phi(l)$ comme une fonction de e et de l et faisons-y $l = l_1$: cette fonction présentera un point singulier pour

$$e = e', \quad |e'| = \varphi(l_1) < e_1$$

et n'en aura pas pour $e = -e'$: car, si l'on change e en $-e$ dans les équations (30) et (31), l se change en $\pi \pm l$ qui est différent de l sauf pour $l = \frac{\pi}{2}$.

La fonction $\Phi(l_1 + \pi)$ présentera de même un point singulier pour $e = -e'$ et n'en aura pas pour $e = e'$ et la somme

$$\Phi(l_1) + \Phi(l_1 + \pi)$$

présentera deux points singuliers $e = e'$, $e = -e'$, et, ces points singuliers étant distincts, les singularités correspondantes ne pourront se détruire. Donc cette somme divergera pour $e = e_1$.

Je puis donc écrire

$$(33) \quad \Psi(l, e) = \Phi(l) + \Phi(l + \pi) = 2 \sum \frac{(-1)^\beta}{\beta! m - p + \beta!} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta} E^{iml},$$

où l'on ne donne à m que des valeurs *paires*.

Il résulte de ce qui précède que la série $\Psi(l_1, e_1)$ diverge.

Passons de cette série à la suivante :

$$\Psi\left(-\frac{\pi}{2}, +i|e_1|\right) = \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

où l'on remplace l'anomalie moyenne par $\frac{\pi}{2}$ et l'excentricité par i multiplié par la valeur absolue de e_1 qui est essentiellement réelle et positive.

Si dans le dernier membre de l'équation (33) nous faisons cette substitution, la valeur absolue de chaque terme demeurera la même; mais tous les termes vont devenir positifs ou tout au moins avoir même argument (en supposant que le nombre p soit pair, ce que nous pouvons faire). En effet, le dénominateur est essentiellement positif, l'argument de $(-1)^\beta$ est $\beta\pi$; celui de

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{m-p+2\beta}$$

est nul si m et p sont pairs comme nous le supposons; celui de

$$(i|e_1|)^{m-p+2\beta}$$

sera

$$(m - p) \frac{\pi}{2} - 3\pi,$$

celui de E^{ml} sera

$$- m \frac{\pi}{2}.$$

L'argument résultant sera donc

$$- p \frac{\pi}{2} + 2,3\pi$$

(ou encore $- p \frac{\pi}{2}$, en supprimant un multiple de 2π); il sera donc constant et indépendant de m et de β . c. q. f. d.

Si donc la série $\Psi(l)$ diverge, il en sera de même, *a fortiori*, de $\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ dont les termes ont même valeur absolue, mais avec un argument constant, au lieu d'avoir un argument variable. Donc

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

diverge; il doit donc en être ainsi au moins de l'une des deux séries $\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Mais nous venons de voir que

$$\varphi(l + \pi) = \varphi(l),$$

c'est-à-dire que $\Phi(l + \pi)$ diverge si $\Phi(l)$ diverge, et inversement. Si donc l'une des deux séries diverge, elles divergent toutes deux. Donc

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, i|e_1|\right)$$

diverge. Donc

$$|e_1| > \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Or, tout ce que nous avons supposé sur e_1 c'est que

$$|e_1| > \varphi(l);$$

cette seconde inégalité entraîne donc la précédente, c'est-à-dire

que

$$\varphi(l) > \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc le minimum de $\varphi(l)$ a lieu pour $l = \frac{\pi}{2}$.

237. Pour déterminer M il faut donc étudier l'équation

$$(34) \quad u - \operatorname{tang} u = \frac{\pi}{2},$$

ou en posant $\frac{\pi}{2} - u = \varepsilon$

$$(34 \text{ bis}) \quad \varepsilon + \cot \varepsilon = 0.$$

Je me propose de démontrer que l'équation (34 bis) ne peut avoir que des racines purement imaginaires. Posons, en effet,

$$\varphi = \cos \varepsilon \rho,$$

il vient

$$\frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \varepsilon^2 \varphi = 0$$

avec [en tenant compte de (34 bis)]

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\rho} = \varphi, & \text{pour } \rho = 1, \\ \frac{d\varphi}{d\rho} = 0, & \text{pour } \rho = 0. \end{cases}$$

Supposons que l'équation (34 bis) ait deux racines ε et ε_1 ; à ces deux racines correspondront deux fonctions φ et φ_1 , et l'on aura

$$\int_0^1 \left(\varphi \frac{d^2 \varphi_1}{d\rho^2} - \varphi_1 \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} \right) d\rho = \left(\varphi \frac{d\varphi_1}{d\rho} - \varphi_1 \frac{d\varphi}{d\rho} \right)_0^1.$$

Le second membre s'annule, tant pour $\rho = 0$ que pour $\rho = 1$, à cause des équations (35), et il reste

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2) \int_0^1 \varphi \varphi_1 d\rho = 0.$$

Si l'équation (35 bis) admet une racine ε , elle admettra la racine imaginaire conjuguée ε_1 ; les deux fonctions φ et φ_1 seront

imaginaires conjuguées, leur produit sera essentiellement positif, de sorte qu'il restera

$$\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2 = 0.$$

Cela ne peut avoir lieu que si ε^2 est réel. Si ε^2 est réel positif, ε est réel. Mais les racines réelles ne sauraient convenir à la question, car l'équation (30) conduirait à une valeur de e plus grande que 1.

Si ε^2 est réel négatif, ε est purement imaginaire. Il s'agit donc de rechercher la plus petite racine purement imaginaire de l'équation (34 *bis*) ou, ce qui revient au même, en changeant ε en $i\varepsilon$, la plus petite racine réelle de

$$(36) \quad \varepsilon(E^{-\varepsilon} - E^{\varepsilon}) + (E^{-\varepsilon} + E^{\varepsilon}) = 0;$$

on en déduira la valeur de M par la formule

$$M = \frac{2}{E^{\varepsilon} - E^{-\varepsilon}}.$$

On trouve ainsi

$$M = 0,6627,$$

ce qui prouve que nos séries convergent toutes les fois que l'excentricité est inférieure à 0,6627; l'équation (36) n'a d'ailleurs qu'une seule racine positive.



CHAPITRE XVI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

238. Il s'agit maintenant de passer au développement de la fonction perturbatrice elle-même et je voudrais exposer d'abord quelques considérations générales sur la façon dont se pose ce problème.

Au n° 212 nous avons rappelé sous quelles formes diverses se présente cette fonction. Nous devons d'abord nous occuper du développement de l'expression (5) du n° 212

$$\frac{-m_1 m_2}{\sqrt{(x'_4 - x'_1)^2 + (x'_5 - x'_2)^2 + (x'_6 - x'_3)^2}},$$

c'est-à-dire de ce qu'on appelle la partie principale de la fonction perturbatrice; c'est le problème le plus difficile, et, une fois qu'il sera résolu, le développement des autres parties de la fonction perturbatrice s'en déduira presque immédiatement. Supposons, en effet, qu'on ait développé cette expression (5) en fonction des éléments elliptiques osculateurs de la première planète

$$a_1, e_1, i_1, l_1, g_1 + \theta_1, \theta_1,$$

et de ceux de la seconde

$$a_2, e_2, i_2, l_2, g_2 + \theta_2, \theta_2 \text{ (}^1\text{)},$$

et que l'on ait trouvé ainsi

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{\Sigma (x'_i - x'_1)^2}} = f(a_1, a_2, \dots),$$

(¹) Cependant pour économiser les indices je désignerai quelquefois ces éléments par a, a', \dots

où f est une fonction des 12 éléments elliptiques osculateurs. On en déduira

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{\Sigma(x'_i - hx'_i)^2}} = f(ha_1, a_2, \dots),$$

h étant un coefficient constant quelconque. Si, en effet, on change a_1 en ha_1 , les autres éléments e_1, i_1, l_1, g_1 et h_1 ne changeant pas, non plus que les éléments osculateurs de la seconde planète, les coordonnées de la première planète, x'_1, x'_2, x'_3 , se changeront en hx'_1, hx'_2, hx'_3 , et celles de la seconde planète x'_4, x'_5, x'_6 , ne changeront pas.

Or, nous avons vu au n° 36 que la fonction perturbatrice, si l'on adopte les variables du n° 30, prend la forme

$$m_1 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB} \right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC} \right),$$

avec

$$BD^2 = x'^2_4 + x'^2_5 + x'^2_6 = \sum x'^2_i,$$

$$AB^2 = \sum \left(x'_i - \frac{m_7}{m_1 + m_7} x'_1 \right)^2,$$

$$BC^2 = \sum \left(x'_i + \frac{m_1}{m_1 + m_7} x'_1 \right)^2.$$

Il s'agit d'obtenir les développements de

$$\frac{1}{AB}, \quad \frac{1}{BC}, \quad \frac{1}{BD}.$$

Or, l'application de la formule (2) nous donne immédiatement

$$\frac{1}{AB} = f\left(\frac{m_7}{m_1 + m_7} a_1, a_2, \dots\right),$$

$$\frac{1}{BC} = f\left(\frac{-m_1}{m_1 + m_7} a_1, a_2, \dots\right),$$

$$\frac{1}{BD} = f(0, a_2, \dots).$$

Cette dernière expression $f(0, a_2, \dots)$ ne peut évidemment dépendre que des éléments de la seconde planète; on l'obtiendra immédiatement si l'on observe qu'elle n'est autre chose que l'expression $\frac{1}{r}$ relative à la seconde planète, et que nous avons appris plus haut au n° 231 à développer $\frac{1}{r}$.

Supposons maintenant que nous ayons adopté, au lieu des variables du n° 30, celles du n° 26 ou celles du n° 44. Il faudra alors développer la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, qui, ainsi que nous l'avons rappelé au n° 213, peut prendre l'une des trois formes suivantes

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3} \sum x' x'_4, \quad \frac{m_1 m_4}{AC^3} \sum x'_1 x'_4, \quad \frac{1}{m_7} \sum y'_1 y'_4.$$

Reprenons la formule (2) et développons les deux membres suivant les puissances de h en négligeant les termes en h^2 et les termes suivants. En observant que, avec les variables des nos 26 et 44, on a

$$BC^2 = \sum x_i'^2$$

et non plus

$$BD^2 = \sum x_i'^2,$$

il viendra

$$\frac{1}{BC} + h \frac{\sum x'_1 x'_4}{BC^3} = f(0, a_2, \dots) + h a_1 \frac{df}{da_1}.$$

On en déduit

$$(3) \quad \frac{\sum x'_1 x'_4}{BC^3} = a_1 \frac{df}{da_1}.$$

Dans $\frac{df}{da_1}$ il faut faire $a_1 = 0$ après la différentiation.

On trouverait de même

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{\sum x'_1 x'_4}{AC^3} = a_2 \frac{df}{da_2},$$

et ici encore, dans $\frac{da_2}{df}$, il faudrait faire $a_2 = 0$ après la différentiation.

239. Il reste à développer

$$\sum y'_1 y'_4.$$

Il nous suffira, pour rattacher cette expression à la fonction

$$f(a_1, a_2, \dots),$$

de la rattacher aux expressions

$$\frac{\Sigma x'_1 x'_2}{BC^3}, \quad \frac{\Sigma x_1 x'_2}{AC^3}$$

liées à f par les relations (3) et (3 bis).

A cet effet, je les relierai les unes et les autres à la fonction

$$\Psi = \Sigma x'_1 x'_2.$$

Les équations du mouvement képlérien nous donnent

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{M x_1}{r^3},$$

M étant la masse centrale attirante et r le rayon vecteur, ou bien

$$n^2 \frac{d^2 x_1}{dl^2} = - \frac{M x_1}{r^3},$$

n désignant le moyen mouvement, et l l'anomalie moyenne.

Nous pouvons appliquer cette formule à notre seconde planète fictive puisque les relations entre les coordonnées de la planète et les éléments osculateurs sont les mêmes que dans le mouvement képlérien d'après la définition même des éléments osculateurs.

Nous devons donc changer

$$x_1, \quad r, \quad l, \quad n^2, \quad M$$

en

$$x'_4, \quad BC, \quad l_2, \quad n_2^2 = \frac{M}{a_2^3}, \quad M,$$

d'où

$$\frac{d^2 x'_4}{dl_2^2} = - \frac{a_2^3 x'_4}{BC^3}.$$

Nous aurions deux équations que l'on déduirait de la précédente en changeant x'_4 en x'_5 ou en x'_6 . Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées par x'_1, x'_2, x'_3 , il viendra

$$\Sigma x'_1 \frac{d^2 x'_i}{dl_2^2} = - a_2^3 \frac{\Sigma x'_1 x'_i}{BC^3},$$

ou en se reportant à la formule (3) et en se rappelant que x'_1, x'_2, x'_3 ne dépendent pas de l_2 , mais seulement des éléments oscula-

teurs de la première planète,

$$(4) \quad \frac{d^2 \Psi}{dl_2^2} = -a_2^3 a_1 \frac{df}{da_1},$$

on trouverait de même

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 \Psi}{dl_1^2} = -a_1^3 a_2 \frac{df}{da_2}.$$

Occupons-nous maintenant de l'expression

$$\sum y'_1 y'_4.$$

Cette expression s'introduit quand on adopte les variables du n° 26; dans ce cas les masses m'_1 et m'_4 attribuées aux deux planètes fictives ont pour valeurs

$$\bullet \quad m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad m'_4 = \frac{m_4 m_7}{m_1 + m_7}$$

(cf. n° 43); on a alors, dans le mouvement képlérien,

$$(5) \quad y'_1 = m'_1 \frac{dx'_1}{dt}, \quad y'_4 = m'_4 \frac{dx'_4}{dt}$$

ou bien

$$(6) \quad y'_1 = m'_1 n_1 \frac{dx'_1}{dl_1}, \quad y'_4 = m'_4 n_2 \frac{dx'_4}{dl_2},$$

n_1 et n_2 étant les deux moyens mouvements. Les formules (5) ne seraient plus vraies dans le mouvement troublé; mais les formules (6) le seront encore, puisqu'elles expriment une relation entre les x' , les y' et les éléments osculateurs et que ces relations sont les mêmes dans le mouvement troublé et dans le mouvement képlérien d'après la définition même des éléments osculateurs.

On aura donc

$$(7) \quad \sum y'_1 y'_4 = m'_1 m'_4 n_1 n_2 \sum \frac{dx'_1}{dl_1} \frac{dx'_4}{dl_2} = m'_1 m'_4 n_1 n_2 \frac{d^2 \Psi}{dl_1 dl_2}.$$

Ainsi $\sum y'_1 y'_4$ se trouve rattachée à Ψ et par là à f .

240. Considérons maintenant une fonction périodique quel-

conque

$$F(u, u')$$

des deux anomalies excentriques u et u' ; elle peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$(8) \quad \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

les p et les p' étant des entiers positifs ou négatifs, mais on peut aussi la développer en série de Fourier procédant suivant les anomalies moyennes l et l' sous la forme

$$(9) \quad \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')}.$$

Il s'agit de savoir quelles relations il y a entre les coefficients des deux séries (8) et (9). Ces coefficients nous sont donnés l'un et l'autre par des intégrales définies

$$(10) \quad 4\pi^2 B_{pp'} = \int \int F \cdot E^{-i(pu+p'u')} du du'$$

et

$$(11) \quad 4\pi^2 A_{mm'} = \int \int F \cdot E^{-i(ml+m'l')} dl dl'.$$

Les intégrales doivent être prises entre les limites 0 et 2π , tant pour u et u' que pour l et l' .

Nous transformerons la formule (11) par une double intégration par parties.

Nous pouvons poser :

$$E^{-i(ml+m'l')} = \frac{d^2 \Phi}{dl dl'},$$

avec

$$\Phi = \frac{-1}{mm'} E^{-i(ml+m'l')}.$$

Nous trouvons alors, en intégrant par parties par rapport à u et à l ,

$$\int \int F \frac{d^2 \Phi}{dl dl'} dl dl' = - \int \int \frac{dF}{du} \frac{d\Phi}{dl'} du dl',$$

et, en intégrant encore par parties par rapport à u' et à l' ,

$$\int \int F \frac{d^2 \Phi}{dl dl'} dl dl' = \int \int \frac{d^2 F}{du du'} \Phi du du';$$

il vient donc

$$-4\pi^2 A_{mm'} mm' = \int \int \frac{d^2 F}{du du'} E^{-i(mu + m'u')} du du'.$$

Or, du développement de F sous la forme (8), nous pourrons déduire

$$\frac{d^2 F}{du du'} = - \sum pp' B_{pp'} E^{i(pu + p'u')},$$

d'où, en tenant compte de l'équation de Képler,

$$4\pi^2 mm' A_{mm'} = \sum pp' B_{pp'} \int \int E^{iA} E^{\Omega} du du',$$

où

$$\begin{aligned} A &= (p - m)u + (p' - m')u', \\ \Omega &= i(me \sin u + m'e' \sin u'), \end{aligned}$$

et où e et e' désignent bien entendu les deux excentricités.

Le coefficient de $pp' B_{pp'}$ est une intégrale double qui peut se décomposer en le produit de deux intégrales simples

$$\int E^{i(p-m)u} E^{ime \sin u} du \int E^{i(p'-m')u'} E^{im'e' \sin u'} du',$$

c'est-à-dire

$$4\pi^2 J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e').$$

Nous avons donc la formule

$$(12) \quad A_{mm'} = \sum \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e'),$$

tout à fait analogue à la formule (17) du Chapitre précédent. Cette formule est due à M. Baillaut.

241. Cette formule se trouve en défaut quand m ou m' sont nuls. Mais elle peut dans ce cas être modifiée et transformée en une autre analogue à la formule (18) du Chapitre précédent.

Nous avons

$$F(u, u') = \sum B_{pp'} E^{i(pu + p'u')},$$

d'autre part nous avons

$$E^{ipu} = \sum \frac{p}{m} J_{m-p}(me) E^{iml},$$

formule dans laquelle on doit, pour $m = 0$, remplacer le coefficient $\frac{p}{m} J_{m-p}$ par 1 pour $p = 0$, par $-\frac{e}{2}$ pour $p = \pm 1$, par 0 dans tous les autres cas. De même on a

$$E^{ip'u'} = \sum \frac{p'}{m'} J_{m'-p'}(m'e') E^{im't'},$$

avec la même convention pour le cas de $m' = 0$.

On en déduit, en remplaçant E^{ipu} et $E^{ip'u'}$ par ces valeurs dans le développement de $F(u, u')$,

$$F(u, u') = \sum \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e') E^{i(mt+m't')}.$$

Nous retrouvons ainsi la formule (12) pour le cas où m et m' sont différents de zéro. Cette formule peut s'écrire sous forme de produit symbolique

$$A_{mm'} = \left[\sum \frac{n}{p} J_{m-p}(me) B_p \right] \left[\sum \frac{p'}{m'} J_{m'-p'}(m'e') B_{p'} \right],$$

en convenant de remplacer le produit symbolique $B_p B_{p'}$ par $B_{pp'}$.

On trouve de même sous forme de produits symboliques

$$(13) \quad \begin{cases} A_{0m'} = \left[B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1}) \right] \left(\sum \frac{p'}{m'} J_{m'-p'} B_{p'} \right), \\ A_{m0} = \left(\sum \frac{p}{m} J_{m-p} B_p \right) \left[B'_0 - \frac{e'}{2}(B'_1 + B'_{-1}) \right], \\ A_{00} = \left[B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1}) \right] \left[B'_0 - \frac{e'}{2}(B'_1 + B'_{-1}) \right], \end{cases}$$

formules analogues à la formule (18) du Chapitre précédent.

242. Supposons par exemple qu'il s'agisse de développer la partie principale de la fonction perturbatrice, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma(x'_1 - x'_k)^2}} = \frac{1}{\Delta}$$

du n° 238.

Nous observons que

$$\Delta^2 = \sum (x'_1 - x'_k)^2$$

se présente sous la forme d'un polynôme du deuxième degré par rapport aux exponentielles

$$E^{iu}, E^{-iu}, E^{iu'}, E^{-iu'}.$$

u étant l'anomalie excentrique relative à la première planète et u' l'anomalie excentrique relative à la deuxième planète. Et, en effet, x'_1, x'_2, x'_3 sont des polynômes du premier degré en E^{iu}, E^{-iu} et x'_4, x'_5, x'_6 sont des polynômes du premier degré en $E^{iu'}, E^{-iu'}$.

En examinant de plus près, nous voyons que ce polynôme contiendra seulement un terme tout connu et des termes en

$$E=2iu, E=iu, E=2iu', E=iu', E(iu=iu'),$$

en tout treize termes. Nous étudierons plus loin ce polynôme plus en détail; mais, pour le moment, observons que si l'on fait

$$x = E^{iu}, y = E^{iu'},$$

l'expression $x^2 y^2 \Delta^2$ deviendra un polynôme entier du sixième degré en x et y que l'on peut appeler $R(x, y)$, d'où

$$x^2 y^2 \Delta^2 = R(x, y).$$

La formule (10), si l'on y fait $F = \frac{1}{\Delta}$, devient alors

$$(14) \quad -4\pi^2 B_{pp'} = \int \int \frac{dx dy}{\Delta x^{p+1} y^{p'+1}} = \int \int \frac{dx dy}{x^p y^{p'} \sqrt{R(x, y)}},$$

ce qui montre que $B_{pp'}$ est exprimé par une intégrale double définie dépendant de la racine carrée du polynôme entier R . Seulement les valeurs que l'on doit donner à x et à y sont imaginaires; on doit faire varier l'une et l'autre de ces deux variables le long d'un cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine.

On peut aussi exprimer le coefficient $A_{mm'}$ par une intégrale définie, mais cette intégrale est plus compliquée. Nous avons trouvé en effet

$$-4\pi^2 mm' A_{mm'} = \int \int \frac{d^2 F}{du du'} E^{-i(ml+m'l')} du du',$$

et l'intégrale double peut s'écrire

$$\int \int \frac{d^2 \frac{1}{\Delta}}{dx dy} E^{\Omega} \frac{dx dy}{x^m y^n},$$

où Ω a le même sens qu'au n° 240 et s'écrit

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[m e \left(x - \frac{1}{x} \right) - m' e' \left(y - \frac{1}{y} \right) \right].$$

La dérivée seconde de $\frac{1}{\Delta}$ serait encore égale à une fonction rationnelle de x et de y divisée par $\sqrt{R(x, y)}$, mais il vaut mieux partir directement de la formule (11) en remarquant que

$$E^{-(ml+m'l')} = x^{-m} y^{-n} E^{\Omega},$$

$$dl = \frac{dx}{ix} \left[1 - \frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right], \quad dl' = \frac{dy}{iy} \left[1 - \frac{e'}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right].$$

On trouve ainsi

$$(15) \quad -4\pi^2 A_{mm'} = \int \int \frac{Q E^{\Omega} dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

avec

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] \left[1 - \frac{e'}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right].$$

Seulement ici l'intégrale (15) est beaucoup plus compliquée que l'intégrale (14) parce que la fonction sous le signe \int n'est plus algébrique, mais contient l'exponentielle E^{Ω} . On voit pour quelle raison le développement suivant les anomalies moyennes est plus compliqué que le développement suivant les anomalies excentriques.

243. Il y a deux cas particuliers sur lesquels nous reviendrons plus loin en détail, mais dont je voudrais dès maintenant dire quelques mots.

C'est d'abord celui où les excentricités sont nulles. Dans ce cas il n'y a plus à faire de distinctions entre les anomalies moyennes et les anomalies excentriques, et l'on a $\Omega = 0$; de plus l'origine de ces anomalies devient arbitraire et nous pouvons les compter à partir de la ligne des nœuds. Nous trouvons alors

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \sigma,$$

où σ désigne l'angle des deux rayons vecteurs, ou bien

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos^2 \frac{J}{2} \cos(u - u') - 2aa' \sin^2 \frac{J}{2} \cos(u + u'),$$

ou bien enfin

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(x, y) = xy \left[(a^2 + a'^2) xy - aa' \cos^2 \frac{j}{2} (x + y) \right. \\ \left. - aa' \sin^2 \frac{j}{2} (x^2 y^2 + 1) \right]. \end{array} \right.$$

244. Le second cas est celui où l'inclinaison mutuelle des deux orbites est nulle; on peut alors choisir les axes de coordonnées de telle sorte que

$$x'_1 = x'_6 = 0,$$

d'où

$$\Delta^2 = [(x'_1 - x'_4) + i(x'_2 - x'_5)] [(x'_1 - x'_4) - i(x'_2 - x'_5)].$$

On voit ainsi que $R(x, y)$ est le produit de deux polynômes entiers du troisième degré

$$R(x, y) = R_1(x, y) R_2(x, y).$$

Le premier de ces deux polynômes $R_2(x, y)$ contient seulement des termes en

$$x^2 y, \quad xy^2, \quad xy, \quad x \quad \text{et} \quad y.$$

Les deux courbes du troisième degré

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0$$

passent par l'origine et ont des points à l'infini communs; elles se coupent en outre en 4 points dont il est aisé d'interpréter la signification.

A chaque point M de la première orbite correspond une valeur de u et par conséquent une valeur de x ; à chaque point M' de la deuxième orbite correspond une valeur de u' et par conséquent une valeur de y . L'équation $R_1 = 0$ exprime que la droite MM' a pour coefficient angulaire i ; l'équation $R_2 = 0$ signifie que MM' a pour coefficient angulaire $-i$.

Les quatre intersections des deux courbes du troisième degré $R_1 = R_2 = 0$ correspondent aux quatre intersections (généralement imaginaires) des deux orbites elliptiques.

Si l'on suppose que y et par conséquent M' soient données, l'équation $R_1 = 0$ est une équation du deuxième degré en x ; cela s'explique parce que la droite de coefficient angulaire i qui passe

par M' coupe la première orbite elliptique en deux points M et M_1 . Les deux points M et M_1 se confondent, de sorte que l'équation $R_1 = 0$ a deux racines égales et que l'on a

$$\frac{dR_1}{dx} = 0,$$

toutes les fois que la droite MM' est tangente à la première orbite elliptique; cette tangente à l'ellipse ayant pour coefficient angulaire $+i$ passe alors par l'un des deux foyers de la deuxième orbite elliptique.

De même, si la droite MM' passe par l'un des deux foyers de la deuxième orbite elliptique, on a

$$\frac{dR_1}{dy} = 0.$$

Mais les deux ellipses ont un foyer commun qui est l'origine. Pour la droite MM' correspondante, on a

$$\frac{dR_1}{dy} = \frac{dR_1}{dx} = 0,$$

ce qui (en regardant x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan) montre que la courbe du troisième degré $R_1 = 0$ (de même que la courbe $R_2 = 0$) a un point double. Pour $R_1 = 0$, ce point double est

$$x = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \quad y = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e'^2}},$$

et pour $R_2 = 0$

$$x = \frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}}, \quad y = \frac{e'}{1 - \sqrt{1 - e'^2}}.$$

245. Nous avons vu au n° 238 que le calcul de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice se déduisait aisément de celui de la partie principale. Mais il y a mieux à faire, car le premier de ces calculs est beaucoup plus aisé que le second, de sorte qu'il est préférable de le faire directement.

Nous avons vu au n° 239 que, si l'on pose

$$\Psi = \sum x'_1 x'_2,$$

les trois formes de la partie complémentaire, auxquelles on est conduit si l'on adopte les variables des n^{os} 26 et 44, sont respectivement proportionnelles aux trois dérivées secondes de Ψ .

Cherchons donc à développer Ψ et pour commencer étudions le développement de Ψ suivant les exponentielles $E^{ipu+ip'u'}$; il sera aisé d'en déduire ensuite par le moyen de la formule (12) le développement procédant suivant les exponentielles $E^{iml+im'l'}$.

Or x'_1, x'_2, x'_3 sont des polynomes du premier degré en $E^{\pm iu}$, x'_4, x'_5, x'_6 sont des polynomes du premier degré en $E^{\pm iu'}$. Donc Ψ est un polynome de premier degré en $E^{\pm iu}$ d'une part, en $E^{\pm iu'}$ d'autre part, de sorte que le développement de Ψ suivant les exponentielles $E^{ipu+ip'u'}$ se composera de neuf termes seulement.

Il résulte de là que, si l'on applique la formule (12) au développement de Ψ suivant les exponentielles $E^{iml+im'l'}$, chaque coefficient $A_{mm'}$ dépendra seulement d'un nombre fini de fonctions de Bessel. On peut donc, en se servant des relations de récurrence entre ces fonctions de Bessel, ramener ce coefficient à ne plus dépendre que des transcendentes

$$J_m(me), J'_m(me), J_{m'}(m'e'), J'_{m'}(m'e').$$

246. Hansen prend pour variable indépendante l'anomalie excentrique u de l'une des planètes; supposons alors qu'il ait développé la fonction perturbatrice, ou l'une de ses dérivées, ou l'une des composantes de la force perturbatrice sous la forme

$$F = \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

nous avons

$$\begin{aligned} l &= u - e \sin u, \\ l' &= u' + e' \sin u'. \end{aligned}$$

D'autre part, dans la fonction perturbatrice dont tous les termes contiennent en facteur la masse perturbatrice, nous pouvons, en négligeant le carré de cette masse, appliquer les formules du mouvement képlérien. Alors l et l' sont des fonctions linéaires du temps et sont par conséquent liées par une relation linéaire. J'écris

$$l' = kl + \epsilon,$$

k étant le rapport des moyens mouvements et ϵ une constante.

J'ai alors

$$l' = ku + z - ke \sin u.$$

ou en posant

$$u_1 = ku + z,$$

$$l' = u_1 - ke \sin u,$$

et enfin

$$u_1 = u' - e' \sin u' + ke \sin u.$$

Proposons-nous de développer F sous la forme

$$F = \sum A_{mm'} E^{i(mu + m'u_1)}.$$

Il viendra

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int \int F E^{-i(mu + m'u_1)} du du_1,$$

ou en intégrant par parties par rapport à u_1 et à u' , c'est-à-dire comme si u était une constante,

$$+4\pi^2 A_{mm'} = \int \int \frac{i}{m'} \frac{dF}{du'} E^{-i(mu + m'u_1)} du du'.$$

Mais

$$\frac{dF}{du'} = i \sum p' B_{pp'} E^{i(pu + p'u')},$$

d'où

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int \int \sum \frac{p'}{m'} B_{pp'} F^{i(pu + p'u')} E^{-i(mu + m'u_1)} du du'.$$

Mais le produit des deux exponentielles sous le signe \int peut s'écrire

$$E^{i(p-m)u} E^{-ikm'e \sin u} E^{i(p'-m')u'} E^{im'e' \sin u'}.$$

On trouve donc finalement

$$(16') \quad A_{mm'} = \sum \frac{p'}{m'} B_{pp'} J_{m-p}(-km'e) J_{m'-p}(m'e').$$

247. Gylden cherche à développer la fonction perturbatrice non plus en fonction des anomalies moyennes, ni en fonction des anomalies excentriques, mais en fonction des anomalies vraies. Si v et v' sont les deux anomalies vraies et qu'on veuille développer la fonction F sous la forme

$$F = \sum C_{mm'} E^{i(mv + m'v')},$$

les coefficients de la série seront donnés par la formule

$$-4\pi^2 C_{mm'} = \int \int F E^{-i(mv+m'v')} dv dv'.$$

Si l'on pose $E^{iv} = x$, $E^{iv'} = y$, cette intégrale double se transforme en une autre où la fonction sous le signe \int est une fonction rationnelle de x , de y et de Δ , et où Δ lui-même est la racine carrée d'une fonction rationnelle de x et de y . C'est ce qui arrivait déjà dans le développement suivant les anomalies excentriques. Les deux développements présentent donc à peu près le même degré de difficulté.

On pourrait chercher d'ailleurs des formules analogues à la formule (12) et qui permettraient de passer de l'un à l'autre.

Il faut ensuite tout exprimer en fonction de la variable indépendante choisie qui est l'anomalie vraie de l'une des planètes. Pour cela, il faut se livrer à un calcul analogue à celui du numéro précédent, mais pour lequel il n'existe malheureusement pas de formule aussi simple.

Nous avons une relation entre l et v que je puis écrire

$$l = v + \varphi(v, e),$$

$\varphi(v, e)$ étant une fonction périodique de v , et de même

$$l' = v' + \varphi(v', e'),$$

et enfin

$$l' = kl + \varepsilon,$$

d'où, en posant

$$v_1 = kv + \varepsilon,$$

$$(17) \quad v_1 = v' + \varphi(v', e') - k\varphi(v, e).$$

Il s'agit ensuite, à l'aide de l'équation (17), de développer l'exponentielle

$$E^{i(mv+m'v')}$$

en série procédant suivant les exponentielles

$$E^{i(pv+p'v_1)}.$$

L'analogie avec le calcul du numéro précédent est évidente.



CHAPITRE XVII.

LES COEFFICIENTS DE LAPLACE.

248. Nous commencerons par le cas où les excentricités sont toutes deux nulles, ainsi que l'inclinaison mutuelle des orbites. L'expression Δ^2 prend alors la forme

$$\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos(l - l'),$$

comme nous l'avons vu au n° 243. Il s'agit de développer

$$\frac{1}{\Delta},$$

mais nous ne nous bornerons pas là, pour les raisons exposées au n° 215, et nous nous efforcerons de calculer le développement de Δ^{-2s} , $2s$ étant un entier impair quelconque.

Nous observerons d'abord que Δ^2 est homogène du deuxième degré par rapport à α et à α' , et d'autre part que Δ^2 ne dépend des angles l et l' que par l'intermédiaire de

$$\cos(l - l') = \cos(u - u') = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

Je rappelle que, quand les excentricités sont nulles, les anomalies moyennes ne se distinguent pas des anomalies excentriques.

Nous sommes ainsi conduits à poser

$$\alpha = \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{x}{y} = z;$$

d'où

$$\Delta^{-2s} = \alpha'^{-2s} \left[1 + \alpha^2 - \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^{-s}.$$

Nous pouvons toujours supposer $\alpha < 1$; il suffit pour cela de

supposer que l'on a désigné par α le plus petit des deux grands axes.

Nous sommes donc conduits à développer

$$\left[1 - \alpha^2 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s} = \left[(1 - \alpha z) \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s}\right]$$

suivant les puissances entières positives et négatives de z sous la forme

$$\sum b_s^{(k)} z^k = \sum b_s^{(k)} E^{ik(l-l')}.$$

Les coefficients $b_s^{(k)}$ ont reçu le nom de *coefficients de Laplace*.

249. Si nous posons

$$F = (1 - \alpha z) \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right),$$

nous voyons que F ne change pas, ni par conséquent F^{-s} quand on change z en $\frac{1}{z}$. Or cela revient à changer k en $-k$; on a donc

$$(1) \quad b_s^{(k)} = b_s^{(-k)}.$$

D'autre part changer k en $-k$ cela revient à changer i en $-i$; l'égalité précédente montre que les coefficients ne changent pas quand on change i en $-i$, nos coefficients sont donc réels, et nous pouvons écrire

$$(2) \quad F^{-s} = b_s^0 + 2 \sum b_s^{(k)} \cos k(l-l').$$

Il y a entre les coefficients de Laplace certaines relations de récurrence qui en facilitent le calcul et qu'il est aisé de déduire de l'identité

$$(3) \quad F^{-s} = \sum b_s^{(k)} z^k.$$

Nous avons identiquement

$$(4) \quad s \frac{dF}{dz} F^{-s} + \frac{dF^{-s}}{dz} F = 0$$

ou

$$s \alpha \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \sum b_s^{(k)} z^k + \sum k b_s^{(k)} z^{k-1} \left[1 + \alpha^2 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = 0,$$

d'où en égalant à zéro le coefficient de z^{k-1} :

$$0 = s\alpha(b_s^{k+1} - b_s^{k-1}) + (1 + \alpha^2)k b_s^{(k)} - \alpha[(k+1)b_s^{(k+1)} + (k-1)b_s^{(k-1)}]$$

d'où la relation de récurrence

$$(5) \quad \alpha b_s^{(k+1)}(s - k - 1) + \alpha b_s^{(k-1)}(-s - k + 1) + (1 + \alpha^2)k b_s^{(k)} = 0.$$

Nous avons ensuite

$$F^{-s} = \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) + \alpha^2 \right] F^{-s-1}$$

ou

$$\sum b_s^{(k)} z^k = \left[1 - \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) + \alpha^2 \right] \sum b_{s+1}^{(k)} z^k,$$

ou en égalant à zéro le coefficient de z^k :

$$(6) \quad b_s^{(k)} = (1 + \alpha^2) b_{s+1}^{(k)} - \alpha(b_{s+1}^{(k+1)} + b_{s+1}^{(k-1)}),$$

relation de récurrence qui permettrait de passer des b_{s+1} aux b_s ; mais il serait préférable de chercher une relation de récurrence permettant de passer des b_s aux b_{s+1} . Nous pouvons prendre deux relations (6) consécutives qui nous donneront deux équations entre $b_s^{(k)}$, $b_s^{(k+1)}$ et les quatre inconnues $b_{s+1}^{(k-1)}$, $b_{s+1}^{(k)}$, $b_{s+1}^{(k+1)}$, $b_{s+1}^{(k+2)}$. D'autre part les relations (5) nous fournissent deux autres relations entre ces quatre inconnues. Nous pouvons donc déterminer ces quatre inconnues en fonction de $b_s^{(k)}$, $b_s^{(k+1)}$.

Pour arriver directement au même résultat, nous partirons de l'identité

$$(7) \quad zFP + z^2 \frac{dF}{dz} Q = 1,$$

où P et Q sont des polynômes du premier degré; il est facile d'établir cette identité et de déterminer les polynômes P et Q. Cela posé, nous pouvons observer que les coefficients de la série (3) peuvent être établis par la formule de Fourier :

$$(8) \quad 2i\pi b_s^{(k)} = \int F^{-s} z^{k-1} dz.$$

L'intégration doit être prise, par rapport à $l - l'$, depuis 0 jusqu'à 2π et par conséquent par rapport à z le long d'un cercle de rayon (1).

En vertu de l'identité (7), nous pouvons multiplier la fonction sous le signe \int par le premier membre de cette identité, ce qui donne

$$2i\pi b_s^{(k)} = \int F^{1-s} z^k P \, dz + \int \frac{dF}{dz} F^{-s} z^{k+1} Q \, dz.$$

Nous pouvons transformer la seconde intégrale par une intégration par parties, en observant que, l'intégration se faisant le long d'une ligne fermée, nous pouvons laisser de côté la partie qui sort du signe \int et qui prend la même valeur aux deux limites. Notre intégrale devient ainsi :

$$\frac{1}{s-1} \int F^{1-s} \left[(k+1) z^k Q + z^{k+1} \frac{dQ}{dz} \right] dz.$$

Mais il est clair que

$$P + \frac{1}{s-1} \left[(k+1) Q + z \frac{dQ}{dz} \right]$$

est un polynome du premier degré en z ; soit

$$\beta z + \gamma$$

ce polynome, notre équation devient

$$2i\pi b_s^{(k)} = \int F^{(1-s)} (\beta z^{k+1} + \gamma z^k) \, dz,$$

d'où

$$(8') \quad b_s^{(k)} = \beta b_{s-1}^{(k+2)} + \gamma b_{s-1}^{(k+1)}.$$

C'est la relation de récurrence cherchée.

Grâce aux relations de récurrence (5), (6) et (8), le calcul des coefficients de Laplace peut être ramené à celui de deux quelconques d'entre eux, par exemple

$$b_{\frac{1}{2}}^0, \quad b_{\frac{1}{2}}^1.$$

250. Considérons maintenant la dérivée

$$\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha}.$$

En différentiant la formule (8) sous le signe \int , il vient :

$$2i\pi \frac{db_s^{(k)}}{dz} = \frac{1}{s} \int F^{-s-1} \left(z + \frac{1}{z} - 2\alpha \right) z^{k-1} dz,$$

d'où

$$(9) \quad \frac{1}{s} \frac{db_s^{(k)}}{dz} = b_{s+1}^{(k+1)} + b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)},$$

ce qui permet d'exprimer les dérivées des b_s en fonction des b_{s+1} et par conséquent en fonction des b_s .

Nous pourrions donc finalement, par ce moyen, exprimer la dérivée $\frac{db_s^{(k)}}{dz}$ en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^0, b_{\frac{1}{2}}^1$, sous la forme

$$(10) \quad \frac{db_s^{(k)}}{dz} = P b_{\frac{1}{2}}^0 + Q b_{\frac{1}{2}}^1,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles en α .

En différentiant la relation (10), nous trouvons :

$$\frac{d^2 b_s^{(k)}}{dz^2} b = \frac{0}{\frac{1}{2}} \frac{dP}{dz} + b_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dQ}{dz} + P \frac{db_{\frac{1}{2}}^0}{dz} + Q \frac{db_{\frac{1}{2}}^1}{dz},$$

de sorte que la dérivée seconde est exprimée en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^0, b_{\frac{1}{2}}^1$ et de leurs dérivées premières, et peut par conséquent, par une nouvelle application de la formule (10), être exprimée en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^0$ et $b_{\frac{1}{2}}^1$ seulement.

On opérerait de même pour les dérivées d'ordre supérieur.

251. Nous avons

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s} \left(1 - \frac{\alpha}{z} \right)^{-s}.$$

Or la formule du binôme nous donne

$$(1 - \alpha z)^{-s} = 1 + s\alpha z + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2 + \dots$$

ou plus généralement

$$(1 - \alpha z)^{-s} = \sum \frac{\Gamma(s+p)}{\Gamma(s)\Gamma(p+1)} \alpha^p z^p,$$

où Γ représente la fonction eulérienne. De même

$$(1 - \alpha z^{-1})^{-s} = \sum \frac{\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)\Gamma(q+1)} \alpha^q z^{-q}$$

ou, par multiplication,

$$F^{-s} = \sum \frac{\Gamma(s+p)\Gamma(s+q)}{\Gamma^2(s)\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)} \alpha^{p+q} z^{p+q},$$

ce qui nous donne pour le coefficient de z^k :

$$(11) \quad b_s^{(k)} = \sum \frac{\Gamma(s+q)\Gamma(s+q+k)}{\Gamma^2(s)\Gamma(q+1)\Gamma(q+k+1)} \alpha^{k+2q},$$

formule qui donne le développement des coefficients de Laplace suivant les puissances croissantes de α . Nous remarquerons tout d'abord que $b_s^{(k)}$ est divisible par α^k , et que c'est une fonction paire ou impaire de α suivant que k est pair ou impair.

Rapprochons la série (11) de la série hypergéométrique de Gauss. Cette série s'écrit :

$$F(A, B, C, \alpha) = \sum \frac{\Gamma(A+q)\Gamma(B+q)\Gamma(C)}{\Gamma(q+1)\Gamma(C+q)\Gamma(A)\Gamma(B)} \alpha^q.$$

La comparaison nous donne immédiatement

$$b_s^{(k)} = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)} \alpha^k F(s, s+k, k+1, \alpha^2).$$

252. On sait que la série hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation linéaire du second ordre, il doit en être de même de $b_s^{(k)}$. C'est en effet ce qu'il est aisé de vérifier. Nous voyons en effet que dans la série (11) le rapport du terme général au précédent est

$$\frac{(s+q-1)(s+q+k-1)}{q(q+k)} \alpha^2.$$

Si donc j'appelle C_q le coefficient de α^{k+2q} , nous aurons

$$q(q+k)C_q = (s+q-1)(s+q+k-1)C_{q-1},$$

d'où

$$(12) \quad \sum q(q+k)C_q \alpha^{2q+k} = \sum (s+q-1)(s+q+k-1)C_{q-1} \alpha^{2q+k}.$$

Or, si nous observons que

$$b = \sum C_q x^{2q+k}, \quad x \frac{db}{dx} = \sum (2q+k) C_q x^{2q+k},$$

$$x^2 \frac{d^2 b}{dx^2} = \sum (2q+k)(2q+k-1) C_q x^{2q+k}$$

et que de même

$$x^2 b = \sum C_{q-1} x^{2q+k}, \quad x^3 \frac{db}{dx} = \sum (2q+k-2) C_{q-1} x^{2q+k},$$

$$x^4 \frac{d^2 b}{dx^2} = \sum (2q+k-2)(2q+k-3) C_{q-1} x^{2q+k};$$

si nous remarquons de plus que les coefficients du premier et du second membre de (12) qui sont $q(q+k)$, $(s+q-1)(s+q+k-1)$ sont des polynômes du second degré en q et par conséquent peuvent s'exprimer linéairement, le premier à l'aide de

$$1, \quad 2q+k, \quad (2q+k)(2q+k-1),$$

le second à l'aide de

$$1, \quad 2q+k-2, \quad (2q+k-2)(2q+k-3),$$

les coefficients ne dépendant que de k et de s , nous verrons qu'il y a une relation linéaire entre les six quantités

$$b, \quad x \frac{db}{dx}, \quad x^2 \frac{d^2 b}{dx^2}, \quad x^2 b, \quad x^3 \frac{db}{dx}, \quad x^4 \frac{d^2 b}{dx^2},$$

relation dont les coefficients ne dépendent que de k et s . C'est l'équation différentielle cherchée.

J'ai supprimé pour abrégé les indices s et k de $b_s^{(k)}$.

Cette équation s'écrit

$$(13) \quad (\alpha^2 - \alpha^4) \frac{d^2 b}{dx^2} + [\alpha - (4s+1)\alpha^3] \frac{db}{dx} - [4s^2\alpha^2 + k^2(1-\alpha^2)] b = 0.$$

Elle peut nous indiquer comment se comporte la série (11) pour les valeurs de α voisines de 1. Les méthodes de Fuchs nous apprennent en effet que les intégrales de cette équation ne peuvent présenter de singularité que quand le coefficient de $\frac{d^2 b}{dx^2}$ s'annule,

c'est-à-dire pour

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Pour $\alpha = 0$, les racines de l'équation déterminante sont $\pm k$, ce qui veut dire que l'équation admet une intégrale particulière développable suivant les puissances de α et commençant par un terme en α^k (cette intégrale n'est autre chose que la fonction $b_s^{(k)}$ qui nous occupe) et que l'intégrale générale est de la forme

$$S + h b_s^{(k)} \log \alpha,$$

h étant une constante quelconque et S une série procédant suivant les puissances entières croissantes positives ou négatives de α et commençant par un terme en α^{-k} .

Restent les points singuliers $\alpha = \pm 1$; je me contenterai d'examiner le point $\alpha = +1$; puisque l'équation différentielle ne change pas quand on change α en $-\alpha$.

Pour $\alpha = +1$, les racines de l'équation déterminante sont 0 et $1 - 2s$; ce qui montre que, outre une intégrale particulière développable suivant les puissances de $\alpha - 1$, l'intégrale générale est de la forme

$$S + P \log(\alpha - 1),$$

où P et S sont développables suivant les puissances entières croissantes de $\alpha - 1$, le développement commençant pour P par un terme de degré 0, pour S par un terme de degré $1 - 2s$.

Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $1 - 2s = 0$ et S ne devient pas infinie, c'est le second terme qui est prépondérant, de sorte que $b_s^{(k)}$ devient infini pour $\alpha = 1$ de la même manière que $\log(\alpha - 1)$. Pour $s = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, le terme S devient infini et prépondérant de sorte que $b_s^{(k)}$ devient infini de la même manière que

$$(\alpha - 1)^{1-2s}.$$

On voit par là que la série (11) converge pour

$$|\alpha| < 1$$

et diverge pour $|\alpha| > 1$. Les résultats précédents se déduisent d'ailleurs immédiatement des propriétés connues de la série hypergéométrique.

253. On a proposé un très grand nombre de procédés de calcul pour les coefficients de Laplace, mais il y en a un qui est très supérieur à tous les autres, c'est celui qui est fondé sur l'emploi des fonctions elliptiques.

Nous savons que la fonction $p(u)$ de Weierstrass est définie par l'équation

$$[p'(u)]^2 = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3),$$

où e_1, e_2, e_3 sont trois constantes liées par la relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

avec la condition

$$p(0) = \infty.$$

Nous savons en outre qu'elle satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} p(u) &= p(-u) = p(u + 2\omega_1) = p(u + 2\omega_2) = p(u + 2\omega_3); \\ p(\omega_1) &= e_1, \quad p(\omega_2) = e_2, \quad p(\omega_3) = e_3. \end{aligned}$$

D'autre part la fonction $\zeta(u)$, qui est telle que

$$\zeta'(u) = -p(u)$$

jouit de la propriété

$$\zeta(u) = -\zeta(-u), \quad \zeta(u + 2\omega_i) = \zeta(u) + 2\eta_i,$$

où

$$\eta_i = \zeta(\omega_i), \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Reprenons l'intégrale

$$b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^k dz}{\sqrt{z(1-\alpha z)(z-\alpha)}}$$

et plus généralement la suivante :

$$b_s^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^{k-1} dz}{F^s} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^{k-1+2s} dz}{[z(1-\alpha z)(z-\alpha)]^s}.$$

Pour identifier aux formules des fonctions elliptiques, nous devons poser :

$$z = p(u) - e_3, \quad \alpha = e_2 - e_3, \quad \frac{1}{\alpha} = e_1 - e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

d'où

$$z(1-\alpha z)(z-\alpha) = \frac{-\alpha}{4} p'^2(u),$$

d'où

$$(14) \quad \left(\frac{-x}{4}\right)^s 2i\pi b_s^k = \int (p - e_3)^{k-1+2s} p'^{1-2s} du$$

et, en particulier,

$$(15) \quad \pi\sqrt{x} b_{\frac{1}{2}}^k = \int (p - e_3)^{k-1+2s} du.$$

254. Rappelons une propriété importante des fonctions doublement périodiques : c'est la possibilité de décomposer ces fonctions en éléments simples.

Soit $F(u)$ une fonction doublement périodique, soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ses infinis distincts; bien entendu je ne regarde pas comme distincts deux infinis quand ils ne diffèrent que par des multiples des périodes $2\omega_i$.

Soit α_j l'un de ces infinis qui sera, je suppose, d'ordre k ; développons $F(u)$ suivant les puissances croissantes de $u - \alpha_j$, et soient

$$\frac{A_k}{(u - \alpha_j)^k} + \frac{A_{k-1}}{(u - \alpha_j)^{k-1}} + \dots + \frac{A_2}{(u - \alpha_j)^2} + \frac{A_1}{u - \alpha_j}$$

l'ensemble des termes de ce développement qui ont un exposant négatif. Posons

$$\begin{aligned} \Phi_j(u) = & A_1 \zeta(u - \alpha_j) - \frac{A_2}{1!} \zeta'(u - \alpha_j) + \frac{A_3}{2!} \zeta''(u - \alpha_j) - \dots \\ & \pm \frac{A_k}{k-1!} \zeta^{(k-1)}(u - \alpha_j), \end{aligned}$$

où $\zeta^{(k)}(u)$ représente la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $\zeta(u)$ par rapport à u .

De cette façon la différence

$$F(u) - \Phi_j(u)$$

reste finie pour $u = \alpha_j$. Nous aurons alors

$$(16) \quad F(u) = \sum \Phi_j(u) + C,$$

C étant une constante. C'est cette formule bien connue (16) qui représente la décomposition de $F(u)$ en éléments simples.

Revenons aux intégrales (14) et (15); elles doivent être prises de 0 à $2\omega_1$. Si nous désignons la fonction sous le signe \int par

$F(u)$, nous décomposerons $F(u)$ en éléments simples, et nous intégrerons séparément chacun de ces éléments. Parmi ces éléments il y en a qui nous donneront zéro, ce sont les éléments

$$\int \zeta^{(k)}(u - a_j) du,$$

où $k \geq 2$; l'intégrale indéfinie nous donne

$$\zeta^{(k-1)}(u - a_j),$$

qui est (au signe près) la fonction $p(u - a_j)$ si $k = 2$ et une de ses dérivées si $k > 2$. Dans tous les cas ce sera une fonction doublement périodique qui reprendra la même valeur aux deux limites 0 et $2\omega_1$; l'intégrale définie est donc nulle.

Si $k = 1$

$$\int \zeta'(u - a_j) du = \zeta(u - a_j),$$

et l'intégrale définie est

$$\zeta(2\omega_1 - a_j) - \zeta(-a_j) = 2\eta_1.$$

Si $k = 0$, on a

$$\int \zeta(u - a_j) du = \log \sigma(u - a_j),$$

et l'intégrale définie est

$$(17) \quad \frac{\log \sigma(2\omega_1 - a_j)}{\log \sigma(-a_j)} = i\pi + 2\eta_1(\omega_1 - a_j).$$

Nous n'aurons pas d'ailleurs à faire d'application de la formule (17) dans ce Chapitre.

Reste enfin la constante C qui nous donne

$$\int C du = 2C\omega_1.$$

Dans le cas qui nous occupe, et qui est celui des intégrales (14) et (15), la fonction $F(u)$ ne peut devenir infinie qu'avec $p(u)$ ou $p'(u)$, c'est-à-dire pour

$$u = 0, \quad \omega_1, \quad \omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_3.$$

J'ajoute que, pour $s = \frac{1}{2}$ [formule (15)], elle devient infinie seulement pour $u = 0$.

De plus, l'exposant $1 - 2s$ est pair, et, comme $p'^2(u)$ est une fonction rationnelle de $p(u)$, il sera de même de $F(u)$. Donc $F(u)$ sera une fonction paire de u , ainsi que de $u - \omega_i$

$$F(u) = F(-u), \quad F(u) = F(2\omega_i - u).$$

Donc le développement de $F(u)$ suivant les puissances croissantes de u ou de $u - \omega_i$ ne contiendra que des termes d'ordre pair; il ne contiendra donc pas de terme de degré -1 [qui aurait pu donner un élément simple en $\zeta(u)$ ou $\zeta(u - \omega_i)$]; et c'est pour cette raison que nous n'aurons pas à faire usage de la formule (17). Nous n'avons pas à nous inquiéter des termes de degré -4 , -6 , ...; qui, comme nous l'avons vu, donneraient une intégrale nulle, mais seulement des termes de degré -2 , ainsi que de la constante C ; nous trouvons ainsi pour notre intégrale

$$(18) \quad 2i\pi \left(\frac{-\alpha}{4}\right)^s \partial_s^{(A)} = 2C\omega_1 - 2\eta_1 \sum A_2,$$

$\sum A_2$ étant la somme des coefficients des termes de degré -2 dans les développements relatifs aux quatre infinis $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

253. Ces coefficients C et A_2 sont des fonctions rationnelles de α . En effet le développement de $p(u)$ ou de $p'(u)$ suivant les puissances croissantes de u ou de $u - \omega_i$ a pour coefficients des fonctions rationnelles de e_1, e_2, e_3 et, par conséquent, de α ; il en est donc de même du développement de

$$F(u) = (p - e_3)^{k-1+2s} p'^{1-2s}.$$

Donc tous nos coefficients A_2 sont rationnels en α .

Parlons maintenant de C . Nous observerons que F non seulement ne peut devenir infinie que pour $u = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, mais ne peut non plus s'annuler que pour l'une de ces quatre valeurs de u . Il en résulte que $F(u)$ ne peut pas admettre les quatre infinis mais, seulement une partie d'entre eux, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier; pour celles de ces quatre valeurs pour lesquelles elle

ne devient pas infinie elle s'annulera de sorte que l'on aura

$$(19) \quad 0 = C + \sum (-1)^{k-1} \frac{A_k}{k-1!} \zeta^{(k-1)}(u - \omega_i)$$

pour $u = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$; et pour $\omega_i = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. D'ailleurs on n'aura pas $u = \omega_i$, puisque u est une des valeurs pour lesquelles F s'annule, et ω_i une des valeurs pour lesquelles F est infinie. Donc

$$u - \omega_i = \omega_1, \quad \omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_3 \quad (\text{à une période près}).$$

Mais A_k est rationnelle en α . Il en sera de même de $\zeta^{(k)}(\omega_1), \zeta^{(k)}(\omega_2), \zeta^{(k)}(\omega_3)$, qui sont des dérivées de $p(u)$ pour $u = \omega_1, \omega_2$ ou ω_3 , et nous venons de rappeler que ces dérivées sont des fonctions rationnelles de e_1, e_2, e_3 et, par conséquent, de α . L'équation (19) montre donc que C est rationnel en α . c. q. f. d.

En particulier nous avons pour

$$s = \frac{1}{2}, \quad k = 0, \quad F(u) = 1,$$

d'où

$$b_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{2\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}}$$

pour

$$s = \frac{1}{2}, \quad k = 1, \quad F(u) = p(u) - e_3 = -e_3 - \zeta'(u),$$

d'où

$$b_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{-2\eta_1 + \frac{2}{3}\omega_1\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\sqrt{\alpha}}.$$

Pour un coefficient $b_s^{(k)}$ quelconque nous trouverions de même

$$b_s^{(k)} = \frac{P\eta_1 + Q\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}},$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de α . On déterminerait aisément ces fonctions rationnelles à l'aide des relations de récurrence du n° 249.

256. Il reste à calculer ω_1 et η_1 , d'où $b_{\frac{1}{2}}^0$ et $b_{\frac{1}{2}}^1$; pour cela je renverrai aux formules et propositions pour l'emploi des fonctions

elliptiques rédigées d'après Weierstrass par M. Schwarz et traduites de l'allemand par M. Padé (Paris, Gauthier-Villars, 1894). Portons-nous à la page 61. Deux cas sont à distinguer, et d'abord celui où

$$e_2 - e_3 < e_1 - e_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha < \frac{1}{\alpha} - \alpha. \quad \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce cas nous poserons

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - \alpha^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}},$$

et alors, en supposant

$$h = E^{\frac{\pi \omega_3 t}{\omega_1}},$$

ce qui est le q de Jacobi, nous aurons

$$l = \frac{2h + 2h^9 + \dots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \dots},$$

d'où

$$(20) \quad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \dots$$

On calculera h par la formule (20) et l'on trouvera ensuite

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\alpha b_{\frac{1}{2}}^0} = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{\alpha} = 2\left(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \dots\right), \\ \sqrt{b_{\frac{1}{2}}^0} = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \dots, \\ \sqrt{(1 - \alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^0} = \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha} - \alpha} = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \dots \end{array} \right.$$

Ce sont les formules (6), (7), (8) de Schwarz, mais nous ferons usage pour le calcul de $b_{\frac{1}{2}}^0$ de la formule

$$(22) \quad \sqrt{b_{\frac{1}{2}}^0} = \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}} (1 + 2h^4 + 2h^{16} + \dots),$$

qui est la formule (4) de Schwarz, et pour le calcul de $b_{\frac{1}{2}}^1$ de la formule

$$(23) \quad \frac{12\eta_1\omega_1}{\pi^2} = \frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - \dots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - \dots},$$

qui est la formule (5) de Schwarz.

Le second cas est celui où $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On se servira alors des formules (18) et suivantes de Schwarz et l'on posera

$$l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, \quad h_1 = E^{-\frac{\omega_1 i \pi}{\omega_3}},$$

et l'on retrouvera la formule

$$(20 \text{ bis}) \quad h_1 = \frac{l_1}{2} + 2 \left(\frac{l_1}{2} \right)^5 + \dots$$

analogue à (20).

Nous aurons ensuite

$$(22 \text{ bis}) \quad \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{\frac{1}{x} + \sqrt{x}}} (1 + 2h_1^4 + \dots),$$

$$(23) \quad b_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{2\omega_1}{\pi\sqrt{x}} = \left(\frac{\omega_3}{\pi i} \right) \left(\log \frac{1}{h_1} \right) \frac{2}{\pi\sqrt{x}},$$

formules (19) de Schwarz. Quant à η_1 et η_3 et par conséquent $b_{\frac{1}{2}}^4$, on les déduira des formules

$$(23 \text{ bis}) \quad 2\eta_3\omega_3 = \frac{\pi^2}{6} \frac{1 - 3^3 h_1^2 + \dots}{1 - 3 h_1^2 + \dots},$$

$$(24) \quad \eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \pi i.$$

On remarquera que ω_3 et η_3 sont purement imaginaires.

257. Il importe de se rendre compte de la rapidité de la convergence; cette rapidité est extrême; en effet, si $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$l < \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1}, \quad h < E^{-\pi},$$

et si $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$l_1 < \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1}, \quad h_1 < E^{-\pi}.$$

Suivant le cas, l ou l_1 sera $< 0,08$; tandis que h ou h_1 sera $< 0,04$. Or les séries qui procèdent suivant les puissances de h et

qui ne sont autres que les séries Θ de Jacobi ou des séries analogues, et qui ne contiennent par exemple que des termes où l'exposant de h est un carré parfait, convergent très rapidement.

Les séries (20) et (20 *bis*), qui donnent h et h_1 , convergent aussi très rapidement, puisque dans le cas le plus défavorable les termes successifs sont respectivement plus petits que

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10^6}, \quad \frac{1}{10^{10}}, \quad \frac{1}{10^{15}}.$$

Et même en négligeant $2h^4$, c'est-à-dire $\frac{1}{2000000}$, on a pour

$$x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[4]{b_{\frac{1}{2}}^0} = \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1-x^2}},$$

et pour $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$b_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{2}{\pi\sqrt{x}} \frac{2}{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^2} \log \frac{2 + 2\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$



CHAPITRE XVIII.

LES POLYNOMES DE TISSERAND.

258. Nous allons examiner maintenant le cas où, les excentricités étant toujours nulles, l'inclinaison mutuelle des orbites est quelconque. Dans ce cas, nous pouvons ne pas faire de distinction entre les anomalies vraies, moyennes ou excentriques et nous avons trouvé au n° 243

$$\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos \sigma,$$

$$\cos \sigma = \cos^2 \frac{J}{2} \cos(u - u') + \sin^2 \frac{J}{2} \cos(u + u').$$

Il s'agit de développer

$$\frac{1}{\Delta^{2s}},$$

et nous trouvons d'abord, en appliquant la formule (2) du Chapitre précédent,

$$(1) \quad F^{-s} = \left(\frac{\alpha'}{\Delta} \right)^{2s} = b_s^0 + 2 \sum b_s^{(k)} \cos k\sigma.$$

Il reste à développer $\cos k\sigma$; c'est ce qu'a fait Tisserand en employant les artifices suivants :

259. Posons

$$\cos^2 \frac{J}{2} = \mu, \quad \sin^2 \frac{J}{2} = \nu, \quad \xi = u - u', \quad \eta = u + u',$$

$$\cos \sigma = \mu \cos \xi + \nu \cos \eta, \quad x = E^{iu}, \quad y = E^{iu'},$$

$$z = \frac{x}{y}, \quad w = xy, \quad 2 \cos \xi = z + z^{-1}, \quad 2 \cos \eta = w + w^{-1},$$

$$Z = F^{-s} = (1 - \alpha\mu z - \alpha\mu z^{-1} - \alpha\nu w - \alpha\nu w^{-1} + \alpha^2)^{-s}.$$

La formule du polynome, généralisation de la formule du binome, nous donne

$$Z = \sum A (-x\mu z)^a (-x\mu z^{-1})^p (-x\nu w)^c (x\nu w^{-1})^q (x^2)^e$$

avec

$$(2) \quad A = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-a-b-c-d-e-s)\Gamma(a+1)\Gamma(p+1)\Gamma(c+1)\Gamma(q+1)\Gamma(e+1)},$$

a, q, c, p, e étant des entiers positifs quelconques et Γ étant la fonction eulérienne, ou bien encore

$$(3) \quad Z = \sum A (-1)^{a+p+c+q} x^{a+p+c+q+2e} \mu^{a+p} \nu^{c+q} z^{a-p} w^{c-q}.$$

Nous voulons développer Z , d'une part, suivant les puissances de x et, d'autre part, suivant les cosinus et les sinus des multiples des anomalies ou, ce qui revient au même, suivant les puissances positives et négatives de z et de w . Nous chercherons donc le coefficient de

$$x^m z^h w^k,$$

où m est entier positif, h et k entiers positifs ou négatifs. Nous ferons donc

$$m = a + p + c + q + 2e,$$

$$h = a - p, \quad k = c - q.$$

L'exposant $a + p$ de μ est plus grand en valeur absolue que h et en diffère d'un nombre pair; l'exposant $c + q$ de ν est plus grand en valeur absolue que k et en diffère d'un nombre pair. La somme de ces deux exposants est plus petite que m et en diffère d'un nombre pair. Le coefficient cherché est donc un polynome entier en μ^2 et ν^2 de degré

$$\frac{m - |h| - |k|}{2}$$

multiplié par le facteur

$$(-1)^{h+k} \mu^{|h|} \nu^{|k|}.$$

Nous observerons en effet que

$$(-1)^{a+p+c+q} = (-1)^{a-p+c-q} = (-1)^{h+k}.$$

Supposons d'abord h et k positifs de façon que $h = |h|$, $k = |k|$ et formons le polynôme P en question de sorte que le coefficient cherché soit

$$(-1)^{h+k} \gamma^h \nu^k P.$$

Faisons donc

$$m - h - k = 2g, \quad m + h + k = 2f,$$

$$a + p = h + 2p, \quad c + q = k + 2q,$$

d'où

$$a + p + c + q + e = \frac{m + h + k}{2} + p + q,$$

$$e = \frac{m - h - k}{2} - p - q;$$

il viendra, en se reportant aux formules (2) et (3),

$$(4) \quad P = \sum \frac{\Gamma(1-s) \mu^{2p} \nu^{2q}}{\Gamma(1-f-s-p-q) \Gamma(h+p+1) \Gamma(k+q+1) \Gamma(p+1) \Gamma(q+1) \Gamma(1+g-p-q)}.$$

Nous observerons que m et $h + k$ sont de même parité et, par conséquent, que f , g , $a + s$ et β sont entiers. Cela va nous permettre de transformer la formule; et, en effet, si l est un entier, on a

$$(5) \quad \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-l)} = \frac{\Gamma(s+l)}{\Gamma(s)} (-1)^l.$$

Cette formule résulte de la relation connue

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s \pi},$$

et du fait que, si l est entier, on a

$$\sin(s+l)\pi = (-1)^l \sin s \pi.$$

260. Le polynôme P n'est autre chose, à un facteur constant près, que l'un des cas particuliers de la série hypergéométrique à deux variables étudiée par M. Appell. Introduisons, en effet, la notation de M. Appell, en posant

$$(a, m) = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-m)} (-1)^m.$$

La première expression se présente sous une forme indéter-

minée quand α et $\alpha + m$ sont des entiers négatifs; mais il est aisé de voir que la vraie valeur est alors le produit

$$(\alpha + m - 1)(\alpha + m - 2) \dots (\alpha + 1)\alpha$$

et d'ailleurs la deuxième expression est alors déterminée.

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} (1, p) &= \Gamma(p+1), & (1, q) &= \Gamma(q+1), \\ (h+1, p) &= \frac{\Gamma(h+p+1)}{\Gamma(h+1)}, & (k+1, q) &= \frac{\Gamma(k+q+1)}{\Gamma(k+1)}, \\ (f+s, p+q) &= (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(1-f-s)}{\Gamma(1-f-s-p-q)}, \\ (-g, p+q) &= (-1)^{p+q} \frac{\Gamma(1+g)}{\Gamma(1+g-p-q)}; \end{aligned}$$

d'où

$$(6) \quad P = \frac{\Gamma(1-s)P_1}{\Gamma(1-f-s)\Gamma(h+1)\Gamma(k+1)\Gamma(g+1)}$$

et

$$(7) \quad P_1 = \sum \frac{(f+s, p+q)(-g, p+q)}{(h+1, p)(1, p)(k+1, q)(1, q)} \mu^{2p} \nu^{2q}.$$

On reconnaît, dans l'expression (7), la série hypergéométrique à deux variables de M. Appell.

Nous avons supposé dans ce qui précède h et k positifs, mais nous n'avons pas ainsi restreint la généralité et, en effet, Z ne change pas quand on change, soit z en z^{-1} , soit ω en ω^{-1} ; d'où il suit que le coefficient de

$$\alpha^m z^h \omega^k$$

est le même que celui de

$$\alpha^m z^{-h} \omega^k, \quad \alpha^m z^h \omega^{-k}, \quad \alpha^m z^{-h} \omega^{-k}.$$

261. On sait que la fonction de M. Appell satisfait à deux équations aux dérivées partielles; on doit s'attendre à ce qu'il en soit ainsi de notre polynôme P qui n'en diffère que par un facteur constant; c'est ce qu'il est aisé de vérifier. Soient, en effet, Z' et Z'' les dérivées premières et secondes de Z par rapport à

$$F = \alpha^2 - 2\alpha(\mu \cos \xi + \nu \cos \eta) + 1,$$

il viendra

$$(8) \quad \frac{dZ}{dx} = 2Z'(\alpha - \mu \cos \xi - \nu \cos \eta);$$

$$(9) \quad \frac{dZ}{d\mu} = -2Z' \alpha \cos \xi, \quad \frac{dZ}{d\nu} = -2Z' \alpha \cos \eta,$$

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 Z}{d\xi^2} = 4x^2 \mu^2 Z'' \sin^2 \xi + 2x\mu Z' \cos \xi, \\ \frac{d^2 Z}{d\eta^2} = 4x^2 \nu^2 Z'' \sin^2 \eta + 2x\nu Z' \cos \eta, \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d^2 Z}{d\mu^2} = 4x^2 Z'' \cos^2 \xi, & \frac{d^2 Z}{d\mu d\nu} = 4x^2 Z'' \cos \xi \cos \eta, \\ \frac{d^2 Z}{d\nu^2} = 4x^2 Z'' \cos^2 \eta, \end{cases}$$

$$(12) \quad \frac{d^2 Z}{dx^2} = 4Z''(\alpha - \cos \sigma)^2 + 2Z',$$

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d^2 Z}{dx d\mu} = -4xZ''(\alpha - \cos \sigma) \cos \xi - 2Z' \cos \xi, \\ \frac{d^2 Z}{dx d\nu} = -4xZ''(\alpha - \cos \sigma) \cos \eta - 2Z' \cos \eta, \end{cases}$$

ce qui nous montre que ces onze dérivées partielles de Z peuvent s'exprimer linéairement en fonctions des neuf quantités suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} Z', & Z' \cos \xi, & Z' \cos \eta, \\ Z'', & Z'' \cos \xi, & Z'' \cos \eta, \\ Z'' \cos^2 \xi, & Z'' \cos \xi \cos \eta, & Z'' \cos^2 \eta, \end{cases}$$

les coefficients étant des polynomes entiers en α, μ, ν .

D'ailleurs, ces quantités (14) ne sont pas indépendantes, elles sont liées par les relations

$$(15) \quad \begin{cases} (1 + \alpha^2)Z'' - 2x\mu Z'' \cos \xi - 2x\nu Z'' \cos \eta = -(s+1)Z', \\ (1 + \alpha^2)Z'' \cos \xi - 2x\mu Z'' \cos^2 \xi - 2x\nu Z'' \cos \xi \cos \eta = -(s+1)Z'' \cos \xi, \\ (1 + \alpha^2)Z'' \cos \eta - 2x\mu Z'' \cos \xi \cos \eta - 2x\nu Z'' \cos^2 \eta = -(s+1)Z' \cos \eta. \end{cases}$$

Il est aisé de comprendre l'origine de ces trois relations.

De

$$Z = F^{-s}$$

nous déduisons

$$FZ'' = -(s+1)Z'.$$

En remplaçant F par sa valeur, on aura la première relation (15) et l'on aura la deuxième ou la troisième en multipliant la première par $\cos \xi$ ou par $\cos \eta$.

Mais nous pouvons aller plus loin; les relations (8) à (13) nous montrent que les onze dérivées

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \alpha \frac{dZ}{d\alpha}, & \frac{dZ}{d\mu}, & \frac{dZ}{d\nu}, & \frac{d^2Z}{d\xi^2}, & \frac{d^2Z}{d\eta^2}, \\ \frac{d^2Z}{d\mu^2}, & \frac{d^2Z}{d\mu d\nu}, & \frac{d^2Z}{d\nu^2}, & \alpha^2 \frac{d^2Z}{d\alpha^2}, & \alpha \frac{d^2Z}{d\alpha d\mu}, & \alpha \frac{d^2Z}{d\alpha d\nu} \end{array} \right.$$

s'expriment linéairement en fonctions des dix quantités

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{lll} Z' \alpha^2, & Z' \alpha \cos \xi, & Z' \alpha \cos \eta, \\ Z'' \alpha^2, & Z'' \alpha^2 \cos^2 \xi, & Z'' \alpha^2 \cos \xi \cos \eta, \quad Z'' \alpha^2 \cos^2 \eta, \\ Z'' \alpha^2, & Z'' \alpha^2 \cos \xi, & Z'' \alpha^2 \cos \eta, \end{array} \right.$$

les coefficients étant des polynômes entiers en μ et en ν *indépendants de α* . D'autre part, la première relation (15), multipliée par α^2 , sera une relation linéaire entre les dix quantités (17); nous avons donc douze relations linéaires entre les vingt-deux quantités (16) et (17); en éliminant les dix quantités (17) il nous restera deux relations entre les quantités (16).

Il y a donc, entre les onze dérivées (16), deux relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes entiers en μ et en ν .

Or nous pouvons poser

$$Z = \sum U \alpha^m \mu^h \nu^k = \sum U \alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)}$$

avec (si par exemple h et k sont positifs)

$$U = (-1)^{h+k} \mu^h \nu^k P.$$

On voit alors que, dans les onze quantités (16), le coefficient de

$$\alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)}$$

se réduit respectivement à

$$mU, \quad \frac{dU}{d\mu}, \quad \frac{dU}{d\nu}, \quad -h^2 U, \quad -k^2 U, \\ \frac{d^2 U}{d\mu^2}, \quad \frac{d^2 U}{d\mu d\nu}, \quad \frac{d^2 U}{d\nu^2}, \quad m(m-1)U, \quad m \frac{dU}{d\mu}, \quad m \frac{dU}{d\nu}.$$

Si donc nous prenons l'une des deux relations linéaires dont il vient d'être question et qui lient les dérivées (16) et que, dans cette relation, j'égalé à zéro le coefficient de

$$\alpha^m E(i(h\xi + k\eta)),$$

j'obtiendrai une relation linéaire entre les dérivées

$$(18) \quad U, \quad \frac{dU}{d\mu}, \quad \frac{dU}{d\nu}, \quad \frac{d^2 U}{d\mu^2}, \quad \frac{d^2 U}{d\mu d\nu}, \quad \frac{d^2 U}{d\nu^2}.$$

Donc le coefficient U satisfait à deux équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre, dont les coefficients sont des polynomes entiers en μ et ν .

Ce sont les équations de M. Appell.

262. Je rappelle la forme de ces équations telles que M. Appell les a établies dans son Mémoire du *Journal de Liouville* (p. 182, 1882).

$$(19) \quad \begin{cases} (x-x^2)r - y^2t - 2xys \\ \quad + [\gamma + (\alpha + \beta + 1)x]p - (\alpha + \beta + 1)yg - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t - x^2r - 2xys \\ \quad + [\gamma' - (\alpha + \beta + 1)y]q - (\alpha + \beta + 1)xp - \alpha\beta z = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations x et y sont les variables; z est la fonction inconnue, p et q sont ses deux dérivées du premier ordre; r, s, t ses trois dérivées du deuxième ordre.

Pour passer de ces équations à celles auxquelles doit satisfaire U , il suffit de faire

$$x = \mu^2, \quad y = \nu^2, \quad z = \mu^{-h}\nu^{-k}U, \\ \alpha = f + s, \quad \beta = -g, \\ \gamma = h + 1, \quad \gamma' = k + 1.$$

Mais une première observation se présente. Les équations li-

néaires simultanées (19) ne comportent pas une solution unique; elles comportent quatre solutions linéairement indépendantes, ainsi que l'a montré M. Appell. Quelle est alors, dans le cas qui nous occupe, la signification de ces diverses solutions?

Reportons-nous à ce que nous avons dit au n° 242, et appliquons des principes analogues au problème qui nous occupe; nous verrons que le coefficient de $z^h \alpha^k$ dans le développement de Z sera égal à

$$(20) \quad \frac{-1}{4\pi^2} \int \int \frac{Z dz d\omega}{z^{h+1} \omega^{k+1}}.$$

L'intégration doit être prise par rapport à z le long d'un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité et par rapport à ω le long d'un cercle analogue tracé dans le plan des ω . La combinaison de ces deux cercles définit un contour fermé à deux dimensions le long duquel doit être prise l'intégrale double. En d'autres termes, *le coefficient cherché est une période de l'intégrale double (20).*

Pour avoir U , il faut développer ce coefficient, qui dépend de α , suivant les puissances croissantes de α et conserver le coefficient de α^m .

Mais l'intégrale double (20) possède d'autres périodes que celle que nous considérons; une quelconque de ces périodes est fonction de α et peut être développée suivant les puissances croissantes de α . Le coefficient de α^m dans ce développement satisfera aux mêmes équations différentielles de U . *La multiplicité des solutions des équations (19) s'explique donc par la multiplicité des périodes de l'intégrale (20).*

263. La série hypergéométrique de M. Appell

$$\sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

peut être exprimée par le moyen d'une intégrale définie, mais je me bornerai sur ce point à quelques brèves indications. Considérons l'intégrale

$$\int u^{p-1}(1-u)^{q-1} du$$

que nous prendrons le long d'une ligne allant de l'infini à l'infini en passant entre les deux points 0 et 1.

On pourra faire, par exemple, $u = \frac{1}{2} + iu'$ et faire varier u' par valeurs réelles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Cette intégrale sera finie et déterminée pourvu que

$$p + q < 1.$$

Dans ces conditions, à un facteur près C facile à déterminer et qui ne change pas quand p ou q augmente d'un nombre entier, notre intégrale est égale à

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

D'autre part, notre série hypergéométrique (à un facteur constant près, indépendant de x et de y comme de m et de n) est égale à

$$\sum \frac{\Gamma(1-\gamma-m)\Gamma(\gamma-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha-m-n)} \frac{\Gamma(1-\gamma'-n)\Gamma(\gamma'-\beta-m)}{\Gamma(1-\beta-m-n)} \\ \times \frac{(1+\beta-\gamma', m)x^m}{(1, m)} \frac{(1+\alpha-\gamma, n)y^n}{(1, n)}.$$

On voit que chaque terme sous le signe \sum est décomposé en quatre facteurs; le premier facteur c'est l'intégrale

$$\int u^{-\gamma-m}(1-u)^{\gamma-1-\alpha-n} du,$$

à un facteur près C qui est indépendant de m et de n , puisque m et n sont entiers (et que le facteur C, ainsi que nous venons de le remarquer, ne change pas quand l'un des exposants augmente d'un nombre entier).

De même le second facteur, à un facteur constant près, c'est l'intégrale

$$\int v^{-\gamma'-n}(1-v)^{\gamma'-1-\beta-m} dv.$$

Remarquons que toutes nos intégrales sont finies, au moins pour les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$, qui satisfont à certaines inégalités.

Le troisième facteur est un terme du développement de

$$(1-x)^{\gamma'-\beta-1} = \sum A_m x^m$$

et le quatrième est un terme du développement de

$$(1-y)^{\gamma'-\alpha-1} = \sum B_n y^n.$$

Nous trouvons donc

$$\sum \int \int du dv u^{-\gamma} (1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'} (1-v)^{\gamma'-1-\beta} A_m x^m B_n y^n,$$

ou bien

$$\sum \int \int du dv u^{-\gamma} (1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'} (1-v)^{\gamma'-1-\beta} A_m \left[\frac{x}{u(1-v)} \right]^m B_n \left[\frac{y}{v(1-u)} \right]^n,$$

ou bien

$$\int \int du dv u^{-\gamma} (1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'} (1-v)^{\gamma'-1-\beta} \left[1 - \frac{x}{u(1-v)} \right]^{\gamma'-\beta-1} \left[1 - \frac{y}{v(1-u)} \right]^{\gamma-1-\alpha},$$

ou enfin

$$(21) \quad \int \int du dv u^a v^b (u - uv - x)^c (v - uv - y)^d$$

avec

$$\begin{aligned} a &= 1 + \beta - \gamma - \gamma', & b &= 1 + \alpha - \gamma - \gamma', \\ c &= \gamma' - \beta - 1, & d &= \gamma - 1 - \alpha. \end{aligned}$$

L'intégrale doit être prise tant par rapport à u que par rapport à v le long d'une ligne allant de l'infini à l'infini en passant entre 0 et 1. Les autres solutions des équations (19) pourraient être représentées par cette même intégrale (21) prise le long d'autres contours convenablement choisis.

264. Envisageons toutes les séries

$$\sum \frac{(\alpha_1, m+n)(\beta_1, m+n)}{(\gamma_1, m)(\gamma'_1, n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

où les constantes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \gamma'_1$ sont égales à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ augmentés d'un nombre entier. Je dis que toutes ces séries pourront s'exprimer

linéairement à l'aide de quatre d'entre elles, les coefficients de l'expression linéaire étant des fonctions rationnelles de x et de y .

Soient, en effet, z_1, z_2, z_3, z_4 quatre solutions des équations (19); la solution générale de ces équations sera une combinaison linéaire de ces quatre solutions; quand x et y reviendront à leurs valeurs primitives, après avoir varié d'une manière continue, il pourra se faire que ces solutions ne reviennent pas à leur valeur primitive, si les variables x et y ont tourné autour d'un point singulier. Mais alors les solutions z_1, z_2, z_3, z_4 auront subi une transformation linéaire à coefficients constants; c'est tout à fait analogue à ce qui se passe dans le cas des équations différentielles linéaires ordinaires.

Cela posé, considérons quatre systèmes d'équations analogues aux équations (19), mais où les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ aient des valeurs différentes, et supposons que la différence des valeurs de α pour deux de ces équations soit un nombre entier (et de même pour β, γ, γ'); soient

$$\begin{array}{cccc} z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_3^{(1)}, & z_4^{(1)}, \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & z_3^{(2)}, & z_4^{(2)}, \\ z_1^{(3)}, & z_2^{(3)}, & z_3^{(3)}, & z_4^{(3)}, \\ z_1^{(4)}, & z_2^{(4)}, & z_3^{(4)}, & z_4^{(4)} \end{array}$$

les quatre solutions fondamentales de chacune de ces quatre équations. De ce que les différences entre les α, \dots sont supposées être des nombres entiers, il résulte ceci, ainsi que le montrerait aisément l'étude des équations (19), c'est que, si x et y décrivent un contour fermé,

$$z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, z_3^{(i)}, z_4^{(i)}$$

subiront la même transformation linéaire que

$$z_1, z_2, z_3, z_4.$$

Donc les déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & \dots & \dots \\ z_1^{(2)} & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(3)} & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(4)} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

seront multipliés par un même facteur. Les rapports de ces déterminants sont donc des fonctions uniformes et l'on verrait aisément (puisque nous n'aurions pas de point singulier transcendant) que ces fonctions uniformes sont rationnelles. Nos déterminants sont donc proportionnels à des fonctions

$$R, R_1, R_2, R_3, R_4$$

qui sont des polynômes entiers en x et en y ; de sorte que nous aurons la relation

$$(22) \quad R\varpi_1 + R_1\varpi_1^{(1)} + R_2\varpi_1^{(2)} + R_3\varpi_1^{(3)} + R_4\varpi_1^{(4)} = 0,$$

ce qui montre la possibilité d'exprimer linéairement toutes nos fonctions à l'aide de quatre d'entre elles.

On arriverait facilement au même résultat en partant des intégrales (21), ce qui permettrait de former effectivement ces relations (22). Je reviendrai plus loin sur ce point.

Il semble d'abord que ce résultat, important pour la théorie des séries hypergéométriques les plus générales, soit sans intérêt dans le cas particulier qui nous occupe; cas où ces séries se réduisent à des polynômes entiers. Mais il faut observer que ces polynômes peuvent être de degré très élevé, car le nombre m du n° 259 d'où dépend ce degré peut être très grand; tandis que les degrés des polynômes R de la relation (22) restent limités si les différences entre les α (ou entre les β , les γ , les γ') restent des entiers limités, surtout si ces différences sont toutes égales à 0 ou à ± 1 ; c'est ce qui permettrait d'établir entre les polynômes hypergéométriques de M. Appell un système de relations de récurrence qui en faciliterait considérablement le calcul.

Ces relations seraient analogues aux relations de récurrence établies par Gauss entre ses séries hypergéométriques et que l'on trouvera à la page 130 du Tome III de ses *Œuvres complètes*, éditées par la Société de Göttingen.

265. Quels sont les points singuliers de la série de M. Appell, considérée comme fonction de x et de y . On peut les trouver de deux manières différentes, en partant des équations (19). Je suppose que l'on ait différentié ces deux équations par rapport aux deux variables x et y ; on obtiendra quatre équations, où figureront

linéairement les quatre dérivées troisièmes de z . Les coefficients de ces quatre dérivées dans ces quatre équations seront

$$\begin{array}{cccc} x - x^2 & -2xy & -y^2 & 0, \\ 0 & x - x^2 & -2xy & -y^2, \\ -x^2 & -2xy & y - y^2 & 0, \\ 0 & -x^2 & -2xy & y - y^2, \end{array}$$

dont le déterminant est égal à

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y).$$

Les points singuliers nous sont alors donnés par $x = 0, y = 0$ et

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y = 0,$$

c'est-à-dire

$$(23) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

On pourrait arriver au même résultat en partant de l'intégrale (21); les points singuliers de la fonction définie par cette intégrale s'obtiendront en envisageant les quatre facteurs de la fonction sous le signe \int

$$u, \quad v, \quad u - uv - x, \quad v - uv - y.$$

Si l'on regarde un instant u et v comme des coordonnées rectangulaires et qu'on égale ces facteurs à zéro, on obtiendra les équations de deux droites et celles de deux hyperboles. Il y aura un point singulier, si les deux hyperboles se touchent ou si trois de ces facteurs s'annulent à la fois.

Quand la variable x tourne autour de zéro, deux des solutions particulières des équations (19) ne changent pas et deux autres sont multipliées par un facteur constant; il en est de même quand la variable y tourne autour de zéro. Quand x et y tournent autour d'un point singulier satisfaisant à l'équation (23), il y a trois solutions qui ne changent pas et une qui est multipliée par un facteur constant. On vérifierait aisément ces résultats et l'on déterminerait ces facteurs par l'étude des équations (19).

Dans le cas particulier qui nous occupe, la série de M. Appell se réduit à un polynome, elle n'a donc aucun point singulier et les points singuliers que nous venons de déterminer appartiennent seulement aux solutions des équations (19).

D'autre part, dans ces cas particuliers, nous avons

$$x = \mu^2 = \cos^2 \frac{J}{2}, \quad y = \nu^2 = \sin^2 \frac{J}{2},$$

d'où

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

Nous retombons donc justement sur l'un des points singuliers définis par l'équation (23). Cela n'a pas d'inconvénient puisque ces points singuliers, comme je viens de le dire, n'appartiennent pas à notre polynôme, mais seulement aux autres solutions des équations (19). Nous verrons même bientôt qu'il résulte de là une simplification.

266. Jusqu'ici nous avons raisonné comme si μ et ν étaient deux variables indépendantes. Nous savons qu'elles sont liées par la relation

$$\mu + \nu = 1$$

de sorte que le polynôme P , qui était entier en μ^2 et ν^2 , devient un polynôme entier en ν seulement. M. Appell a transformé les équations (19) en y remplaçant y par ν^2 et x par $(1 - \nu)^2$; il montre ainsi (*Journal de Liouville*, 1884), par un calcul que je ne reproduirai pas, que la solution générale z de ces équations (19) et par conséquent P satisfait à une équation du troisième ordre. Il forme cette équation (p. 418) et l'écrit :

$$(24) \quad (\nu - \nu^2)^2 z''' + (\nu - \nu^2)(a + b\nu) z'' + (c + d\nu + e\nu^2) z' + (l\nu + p) z = 0,$$

z' , z'' , ... sont les dérivées successives de z par rapport à ν ; les constantes a , b , ... ont pour valeurs

$$a = A - \gamma + 2\gamma' = +3k + 2 + s,$$

$$b = -2A - \gamma - \gamma' = -3(h + k + 1) - 2s,$$

$$c = (2\gamma' - 1)(A - \gamma) = (2k + 1)(k + s),$$

$$d = -2(2B + 2A\gamma' - \gamma') = -4B + 4(k + 1) \left(h + k + s - \frac{1}{2} \right),$$

$$e = 4B + (2A - 1)(\gamma + \gamma') = 4B + 2 \left(h + k + s - \frac{1}{2} \right) (h + k + 2),$$

$$l = 4B(\gamma + \gamma' - 1) = 4B(h + k + 1),$$

$$p = 2B(1 - 2\gamma') = -2B(2k + 1);$$

$$A = \alpha + \beta + 1, \quad B = \alpha\beta = -g(f + s).$$

Comment se fait-il que nos équations (19), qui admettaient quatre solutions indépendantes, se trouvent transformées en une équation du troisième ordre qui n'en admet plus que trois? Cela est aisé à expliquer. En effet, la relation $\mu + \nu = 1$ équivaut à la relation (23) qui définit un des points singuliers. Quand on tourne autour de ce point singulier, trois solutions restent holomorphes, tandis que la quatrième est multipliée par un facteur constant, elle devient donc nulle ou infinie (suivant les valeurs de α , etc.) au point singulier; donc, quand on fait $\mu = 1 - \nu$, l'une des quatre solutions disparaît et il n'en reste plus que trois.

267. Dans le cas particulier de $s = \frac{1}{2}$, il se produit une grande simplification, comme l'avait montré M. Tisserand et comme l'a retrouvé depuis M. Appell par un calcul que nous allons résumer. Désignons toujours, en effet, par les lettres p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et à y , et faisons

$$x = \mu^2 = (1 - \nu)^2, \quad y = \nu^2,$$

il viendra

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\nu} = 2(q\nu - p\mu), \\ \frac{d^2z}{d\nu^2} = 4(r\mu^2 - 2s\mu\nu + t\nu^2) + 2(p + q). \end{cases}$$

En éliminant r, s et t entre ces deux équations et les deux équations (19), et se rappelant que $\mu + \nu = 1$, on trouve

$$(25 \text{ bis}) \quad \nu(1 - \nu) \frac{d^2z}{d\nu^2} + (A\nu + B) \frac{dz}{d\nu} + Cz = 2D(p\mu + q\nu)$$

où A, B, C, D sont des constantes, et où

$$D = \alpha + \beta - \gamma - \gamma' + \frac{3}{4};$$

en remplaçant $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ par leurs valeurs

$$f + s, \quad -g, \quad h + 1, \quad k + 1,$$

et nous rappelant que

$$f - g = h + k,$$

nous trouverons

$$D = s - \frac{1}{2}.$$

Donc, pour $s = \frac{1}{2}$, notre inconnue z satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre que l'on obtient en égalant à zéro le premier membre de (25 bis). On reconnaît la forme des équations auxquelles satisfont les séries hypergéométriques de Gauss à une variable.

Donc dans le cas de $s = \frac{1}{2}$, notre polynôme P se réduit à une série hypergéométrique de Gauss à une seule variable. Il arrive alors qu'une seconde solution des équations (19) s'annule identiquement pour $\mu + \nu = 1$. L'élimination de r , s , t entre les équations (19) et (25) présente quelques particularités. Si l'on ajoute les équations (19) et seconde équation (25) respectivement multipliées par

$$\mu, \quad \nu, \quad \frac{\mu\nu}{4},$$

on verra disparaître à la fois les termes en r , s et t si l'on suppose

$$\mu + \nu = 1;$$

il nous restera donc après l'élimination non pas une, mais deux équations dont la combinaison fournira (25 bis).

268. Supposons maintenant $s = 1$. Il semble d'abord que cela n'ait pas d'intérêt puisque s doit toujours être la moitié d'un nombre impair. Mais on verra bientôt que la simplification que nous allons obtenir aura une application importante.

Dans le cas de $s = 1$, le polynôme P devient, pour $\mu = 1 - \nu$, non plus un polynôme hypergéométrique de Gauss à une variable, ainsi que cela arrivait pour $s = \frac{1}{2}$, mais le carré d'un pareil polynôme.

En effet :

La série hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation différentielle du deuxième ordre, son carré satisfait donc à une équation du troisième ordre qu'il est aisé de former. Si nous cher-

chons à identifier cette équation avec l'équation (24), nous verrons que l'identification est possible dans le cas de $s = 1$.

Ce résultat, dû d'abord à Tisserand, a été démontré par Stieltjes d'une façon fort élégante. Reprenons les équations (19) et faisons-y un changement de variables en posant

$$x = (1 - \rho)(1 - \rho'), \quad y = \rho\rho';$$

nous verrons que, dans le cas de $s = 1$, les équations (19) se ramènent à deux équations linéaires du deuxième ordre, dont l'une ne contient que $\rho, z, \frac{dz}{d\rho}, \frac{d^2z}{d\rho^2}$, tandis que l'autre ne contiendra que $\rho', z, \frac{dz}{d\rho'}, \frac{d^2z}{d\rho'^2}$. On passe d'ailleurs d'une de ces équations à l'autre en accentuant partout la lettre ρ .

La première de ces équations est une équation différentielle linéaire ordinaire entre z et ρ , et l'on voit facilement que c'est précisément celle qui définit une série hypergéométrique ordinaire de Gauss. Si donc $z = F(\rho)$ est une solution de cette équation, on satisfera au système des deux équations en faisant

$$z = F(\rho) F(\rho').$$

On conclura de là que notre polynôme hypergéométrique à deux variables est à un facteur constant près le produit de deux polynômes hypergéométriques à une variable, l'un en ρ , l'autre en ρ' .

Faisons maintenant

$$\mu + \nu = 1,$$

c'est-à-dire

$$\rho = \rho';$$

d'où

$$y = \rho^2 = \nu^2, \quad x = (1 - \rho)^2 = \mu^2; \quad \rho = \nu,$$

il viendra

$$z = [F(\nu)]^2.$$

On voit que, quand on tiendra compte de la relation

$$\mu + \nu = 1,$$

notre polynôme hypergéométrique à deux variables deviendra à un facteur constant près le carré d'un polynôme hypergéométrique à une variable en ν .

C. Q. F. D.

Je renverrai, pour le détail du calcul, au *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, t. I, p. 488 et suivantes.

269. Pour comprendre l'application possible du résultat précédent, reportons-nous au commencement du Chapitre; soit

$$F^{-s} = \left(\frac{\alpha'}{\Delta} \right)^{2s} = (1 - 2\alpha \cos \sigma + \alpha^2)^{-s}.$$

Nous avons trouvé

$$F^{-s} = \sum P \alpha^m (-1)^{h+k} z^h w^k \mu^h \nu^k,$$

P étant le polynôme hypergéométrique à deux variables que nous venons d'étudier. Dans le cas de $s = 1$, nous venons de voir que ce polynôme est à un facteur constant près le carré d'un polynôme hypergéométrique à une variable. Mais dans ce cas on a

$$F^{-s} = \frac{1}{(1 - \alpha E^{\iota\sigma})(1 - \alpha E^{-\iota\sigma})} = \frac{1}{E^{\iota\sigma} - E^{-\iota\sigma}} \left[\frac{E^{\iota\sigma}}{1 - \alpha E^{\iota\sigma}} - \frac{E^{-\iota\sigma}}{1 - \alpha E^{-\iota\sigma}} \right].$$

Il est aisé de développer le dernier membre suivant les puissances de α et l'on trouve

$$F^{-s} = \sum \alpha^m \frac{\sin(m+1)\sigma}{\sin \sigma}.$$

Donc le polynôme P n'est autre chose que le coefficient de

$$(-z\mu)^h (-w\nu)^k$$

dans

$$\frac{\sin(m+1)\sigma}{\sin \sigma},$$

en supposant

$$2 \cos \sigma = \mu(z + z^{-1}) + \nu(w + w^{-1}).$$

Ce coefficient s'exprime donc à l'aide des polynômes de Gauss (polynômes hypergéométriques à une variable).

Supposons maintenant s quelconque et revenons à la formule (1), elle peut s'écrire

$$(26) \quad F^{-s} = b_s^0 + \sum b_s^{(k)} \frac{\sin(k+1)\sigma}{\sin \sigma} - \sum b_s^{(k)} \frac{\sin(k-1)\sigma}{\sin \sigma}.$$

Or nous venons de voir que les expressions de la forme

$$\frac{\sin(k+1)\sigma}{\sin\sigma}$$

pouvaient se développer à l'aide des polynomes de Gauss; il en est donc de même de F^{-s} .

270. On peut encore opérer d'une autre manière. Ecrivons

$$F^{-s} = (1 + \alpha^2)^{-s} (1 - 2\beta \cos \sigma)^{-s},$$

où

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2},$$

il reste à développer

$$(1 - 2\beta \cos \sigma)^{-s}.$$

Il est évident que nous obtiendrons ce développement en nous reportant aux formules (2) et (3), en y remplaçant α par β , et en n'y conservant que les termes où $e = 0$.

Or, ces termes seront ceux où

$$m = h + k + p + q,$$

c'est-à-dire ceux où l'exposant de β (qui remplace α) est la somme de ceux de μ et de ν ; il suffira donc de conserver, dans le polynome P , les termes du degré le plus élevé en μ et ν .

Nous avons trouvé plus haut

$$(27) \quad F^{-s} = \sum P \alpha^m (-\mu z)^h (-\nu w)^k$$

et nous trouvons maintenant

$$(28) \quad F^{-s} = (1 + \alpha^2)^{-s} \sum P_0 \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \right)^m (-\mu z)^h (-\nu w)^k,$$

P_0 étant ce que devient P quand on n'y conserve que les termes du degré le plus élevé en μ et en ν ; or, nous avons, à un facteur constant près,

$$P = \sum \frac{(a, p+q)(b, p+q)}{(c, p)(c', q)(1, p)(1, q)} \mu^{2p} \nu^{2q},$$

a, b, c, c' étant des constantes et b entier négatif. Il faut conserver

les termes du degré le plus élevé, c'est-à-dire faire

$$p + q = -b;$$

d'où

$$(b, p + q) = \pm (-b)!$$

Le facteur

$$(a, p + q) = (a, -b)$$

est également constant.

$$\begin{aligned} (c', q) &= (c', -b - p) = (-1)^p \frac{\Gamma(1 - c')}{\Gamma(1 - c' + b + p)} \\ &= (-1)^p \frac{\Gamma(1 - c')}{\Gamma(1 - c' + b)(1 - c' + b, p)}, \end{aligned}$$

de sorte que (c', q) est en raison inverse de

$$(1 - c' + b, p).$$

De même $(1, q)$ est en raison inverse de (b, p) ; nous avons donc, à un facteur constant près,

$$P_0 = v^{-2b} \sum \frac{(1 - c' + b, p)(b, p)}{(c, p)(1, p)} \left(\frac{\mu^2}{v^2} \right)^p,$$

c'est-à-dire que P_0 est égal à v^{-2b} multiplié par un polynôme hypergéométrique de Gauss en $\frac{\mu^2}{v^2} = \cot^4 \frac{J}{2}$.

Si nous rapprochons les relations (26), (27) et (28), nous pouvons résumer nos résultats comme il suit :

Nous voulons développer Δ^{-2s} et nous cherchons le coefficient d'une exponentielle quelconque

$$E^i(pu + p'u').$$

Cette exponentielle peut être toujours mise sous la forme

$$x^h w^k = E^i(h\xi + k\eta);$$

ce coefficient étant divisible par $\mu^h v^k$ je l'appellerai

$$M_{\mu^h v^k};$$

M dépend de α , de μ et de v . Je puis le développer :

1° Suivant les puissances de α , le coefficient de α^m est alors un

polynome hypergéométrique d'Appell à deux variables en $\cos^2 \frac{J}{2}$, $\sin^2 \frac{J}{2}$, qui se réduit à un polynome de Gauss en $\sin^2 \frac{J}{2}$ pour $s = \frac{1}{2}$.

2° Suivant les coefficients de Laplace b_s^k qui sont des fonctions de α ; le coefficient de $b_s^{(k)}$ est alors la différence des carrés de deux polynomes de Gauss en $\sin^2 \frac{J}{2}$;

3° Suivant les quantités

$$\frac{\alpha^m}{(1 + \alpha^2)^{m+s}},$$

le coefficient de chacune de ces quantités est alors égal à

$$\sin^2 (m-h-k) \frac{J}{2}$$

multiplié par un polynome de Gauss en $\cot^2 \frac{J}{2}$.

Dans les trois cas le calcul des polynomes de Gauss peut être simplifié par les relations de récurrence dont j'ai parlé plus haut et que Gauss a démontrées dans le Tome III de ses *Œuvres complètes*, p. 130 et suivantes.



CHAPITRE XIX.

LES OPÉRATEURS DE NEWCOMB.

271. Nous allons maintenant supposer que les excentricités ne sont pas nulles et nous proposer de développer la partie principale de cette fonction perturbatrice suivant les puissances de ces excentricités. La meilleure méthode est celle de Newcomb qui repose sur l'emploi de certains *opérateurs* (*Astronomical Papers*, vol. 3).

Pour bien faire comprendre l'esprit de cette méthode, je vais prendre d'abord un exemple simple. Soit $F(x)$ une fonction quelconque de x ; changeons x en

$$x + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 = x + \varepsilon$$

et cherchons à développer $F(x + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3)$ suivant les puissances croissantes de h ; je n'aurai pour cela qu'à appliquer la formule de Taylor

$$F(x + \varepsilon) = \sum \frac{\varepsilon^m}{m!} F^{(m)},$$

à remplacer ε^m par $(\alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3)^m$, à développer cette expression et à ordonner par rapport à h . Le coefficient de h^k sera un polynome de la forme

$$b_1 F' + b_2 F'' + \dots + b_k F^{(k)},$$

où les b sont des coefficients constants et les $F^{(k)}$ les dérivées successives de F ; ceci peut s'écrire

$$(b_1 D + b_2 D^2 + \dots + b_k D^k) F,$$

où D^k est l'indice d'une différentiation répétée k fois. Cette expression

$$b_1 D + \dots + b_k D^k$$

sera ce qu'on appelle un *opérateur*; c'est un symbole d'opération. Si j'appelle Π_k cet opérateur, je pourrai écrire

$$(1) \quad F(x + \varepsilon) = F(x) + h \Pi_1 F + h^2 \Pi_2 F + \dots$$

Cela nous indique déjà l'esprit de la méthode; mais nous allons voir comment on peut former ces opérateurs. A cet effet, je fais

$$F(x) = E^{\lambda x};$$

d'où

$$\begin{aligned} F(x + \varepsilon) &= E^{\lambda x} E^{\lambda \varepsilon}, \\ \Pi_k E^{\lambda x} &= E^{\lambda x} (b_1 \lambda + \dots + b_k \lambda^k). \end{aligned}$$

En faisant donc $F(x) = E^{\lambda x}$ dans la formule (1), nous trouvons

$$E^{\lambda \varepsilon} = \sum h^k \Pi_k$$

en convenant de remplacer D^m par λ^m et de faire $\Pi_0 = 1$.

En d'autres termes, on obtiendra l'opérateur Π_k en développant $E^{\lambda \varepsilon}$ suivant les puissances de h comme si D était une quantité ordinaire et en conservant le coefficient de h^k .

Nous pourrions donc regarder $E^{\lambda \varepsilon}$ comme un opérateur et écrire

$$(2) \quad F(x + \varepsilon) = E^{\lambda \varepsilon}(F).$$

Envisageons maintenant une fonction de deux variables $F(x, y)$ et cherchons à développer $F(x + \varepsilon, y + \varepsilon')$ avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \dots, \\ \varepsilon' &= \alpha'_1 h + \alpha'_2 h^2 + \alpha'_3 h^3 + \dots \end{aligned}$$

Nous pourrions opérer de la même manière, nous développerons $F(x + \varepsilon, y + \varepsilon')$ suivant les puissances de ε et de ε' par la formule de Taylor; nous développerons ensuite $\varepsilon^m \varepsilon'^n$ suivant les puissances de h et nous ordonnerons par rapport à h , nous trouverons ainsi

$$(1 \text{ bis}) \quad F(x + \varepsilon, y + \varepsilon') = \sum h^k \Pi_k F,$$

où Π_k sera un opérateur qui prendra la forme d'un polynôme entier en D et en D' , avec cette convention que

$$D^p D'^q$$

est le signe d'une opération qui consiste à différentier p fois par rapport à x et q fois par rapport à y .

Pour déterminer ce polynôme Π_k , il suffira de prendre pour $F(x, y)$ la fonction particulière $E^{(\lambda x + \mu y)}$, ce qui, par une analyse toute pareille à celle qui précède, donnera

$$E^{\lambda \varepsilon + \mu \varepsilon'} = \sum h^k \Pi_k$$

en remplaçant D et D' par λ et μ dans le second membre.

Nous pourrions donc écrire symboliquement

$$(2 \text{ bis}) \quad F(x + \varepsilon, y + \varepsilon') = E^{D\varepsilon + D'\varepsilon'}(F)$$

en regardant $E^{D\varepsilon + D'\varepsilon'}$ comme un opérateur.

272. On pourrait supposer que ε et ε' dépendent, non d'une seule variable h , mais de deux variables h et h' ou d'un plus grand nombre, et qu'on veut développer $F(x + \varepsilon, y + \varepsilon')$ suivant les puissances de h et de h' ; il n'y aurait rien à changer à ce qui précède.

On retrouverait la formule (2 bis) sans aucune modification; quant à la formule (1 bis) il faudrait l'écrire comme il suit :

$$F(x + \varepsilon, y + \varepsilon') = \sum h^i h'^j \Pi_{ij} F.$$

Examinons de plus près l'opérateur Π_{ij} , je dis qu'il y aura un cas où l'on aura

$$\Pi_{ij} = \Pi_{i0} \Pi_{0j},$$

de sorte que notre opérateur à double indice pourra être regardé comme le produit de deux opérateurs à simple indice. C'est le cas où ε est égal à une fonction de h seulement, plus une fonction de h' seulement, et où il en est de même de ε' . Supposons, en effet,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \varepsilon' &= \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, \end{aligned}$$

ε_1 et ε'_1 dépendant de h seulement, tandis que ε_2 et ε'_2 dépendent de h' seulement. On aura alors

$$E^{D\varepsilon + D'\varepsilon'} = E^{D\varepsilon_1 + D'\varepsilon'_1} E^{D\varepsilon_2 + D'\varepsilon'_2},$$

de telle façon que le coefficient de $h^i h^j$ dans le développement de $E^{D\varepsilon + D'\varepsilon'}$, c'est-à-dire Π_{ij} , sera le produit du coefficient de h^i dans le développement de $E^{D\varepsilon_1 + D'\varepsilon'_1}$, c'est-à-dire de Π_{i0} par le coefficient de h^j dans le développement de $E^{D\varepsilon_2 + D'\varepsilon'_2}$, c'est-à-dire par Π_{0j} .

Ce résultat s'étendrait évidemment au cas où le nombre des variables serait plus grand.

Remarquons que d'après leur définition même nos opérateurs sont *permutables*, puisque les opérateurs simples D et D' le sont eux-mêmes.

273. Appliquons ceci au développement de $\frac{1}{\Delta}$.

Nous prendrons pour origine des longitudes dans les plans des deux orbites la ligne commune des nœuds; la longitude moyenne est égale à l'anomalie moyenne plus la longitude du périhélie (qui ici se réduit à la distance du périhélie au nœud). Mais, au lieu de prendre pour variables la longitude moyenne et la longitude du périhélie, ou bien encore l'anomalie moyenne et la longitude du périhélie comme on le fait d'ordinaire, nous pouvons évidemment prendre la longitude moyenne et l'anomalie moyenne.

Nous considérerons donc $\frac{1}{\Delta}$ comme une fonction de 9 variables qui seront, outre l'inclinaison mutuelle des orbites : 1° les logarithmes des grands axes; 2° les excentricités; 3° les longitudes moyennes; 4° les anomalies moyennes.

Nous aurons donc, après développement,

$$(3) \quad \frac{1}{\Delta} = \sum A e^m e'^{m'} E^{(p\zeta + p'\zeta' + ql + q'l')}$$

où m, m', p, p', q, q' sont des entiers, où l et l' sont les anomalies moyennes, ζ et ζ' les longitudes moyennes; et où A est une fonction de l'inclinaison et des logarithmes des grands axes.

Si les excentricités étaient nulles, les longitudes moyennes se confondraient avec les longitudes vraies, les grands axes avec les rayons vecteurs; et la distance ne dépendrait plus des anomalies moyennes l et l' (mais seulement des grands axes et de ζ, ζ'). Donc dans notre développement (3) disparaîtraient tous les termes dépendant de e, e', l, l' , c'est-à-dire tous ceux où les entiers m, m', q, q' ne sont pas nuls.

Mais, dans le cas des excentricités nulles, le développement (3) est connu, c'est celui que nous avons obtenu dans le Chapitre précédent; et il s'agit d'en déduire le développement dans le cas général.

Or il est clair que Δ ne peut dépendre que des longitudes vraies et des rayons vecteurs. On obtiendra donc le développement dans le cas général, en partant du développement pour les excentricités nulles et en y remplaçant les logarithmes des grands axes

$$\log a, \log a'$$

et les longitudes moyennes

$$\zeta, \zeta'$$

par les logarithmes des rayons vecteurs

$$\log r = \log a + \log \frac{r}{a}, \quad \log r' = \log a' + \log \frac{r'}{a'}$$

et les longitudes vraies

$$v = \zeta + (v - \zeta), \quad v' = \zeta' + (v' - \zeta').$$

Il suffit d'appliquer les principes du numéro précédent, en faisant jouer à $\frac{1}{\Delta}$ le rôle de $F(x, y)$, à

$$\log a, \log a', \zeta, \zeta',$$

le rôle de x et y , à

$$\log r, \log r', v, v',$$

celui de $x + \varepsilon, y + \varepsilon'$, et par conséquent à

$$(4) \quad \log \frac{r}{a}, \log \frac{r'}{a'}, v - \zeta, v' - \zeta'$$

celui de ε et ε' . En effet, ces quatre quantités (4) sont développables suivant les puissances de

$$eE''', eE^{-i''}, e'E''', e'E^{-i''}$$

qui vont jouer le rôle de h et h' et ne dépendent d'ailleurs pas de a, a', ζ, ζ' .

Soit donc F le développement pour les excentricités nulles et

F_1 le développement dans le cas général; soient

$$D, D_1, D', D'_1$$

des indices de différentiation se rapportant à

$$\log \alpha, \zeta, \log \alpha', \zeta';$$

nous aurons pour l'expression analogue à $D\varepsilon + D'\varepsilon'$

$$D \log \frac{r}{\alpha} + D_1(\nu - \zeta) + D' \log \frac{r'}{\alpha'} + D'_1(\nu' - \zeta'),$$

de sorte qu'on aura symboliquement par la formule (2 bis) :

$$(5) \quad F_1 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^D \left(\frac{r'}{\alpha'}\right)^{D'} E^{D_1(\nu - \zeta) + D'_1(\nu' - \zeta')} F.$$

L'expression

$$(6) \quad \left(\frac{r}{\alpha}\right)^D \left(\frac{r'}{\alpha'}\right)^{D'} E^{D_1(\nu - \zeta) + D'_1(\nu' - \zeta')}$$

peut se développer suivant les puissances de

$$e E^{\pm i l}, \quad e' E^{\pm i l'},$$

en faisant le calcul comme si D, D', D_1, D'_1 étaient des quantités ordinaires; les coefficients du développement sont alors des polynômes entiers par rapport à D, D', D_1, D'_1 . Soit alors

$$\sum \Pi (e E^{i l})^\alpha (e E^{-i l})^\beta (e' E^{i l'})^{\alpha'} (e' E^{-i l'})^{\beta'}$$

le développement ainsi obtenu; ce que je puis écrire :

$$\sum \Pi e^m e'^{m'} E^{i(q l + q' l')}$$

en écrivant m, m', q, q' au lieu de $\alpha + \beta, \alpha' + \beta', \alpha - \beta, \alpha - \beta'$. Le coefficient Π sera un opérateur qui dépend des quatre nombres m, m', q, q' , ce que nous mettrons en évidence en écrivant

$$\Pi_{qq'}^{mm'}.$$

Nous aurons alors

$$F_1 = \sum e^m e'^{m'} E^{i(q l + q' l')} \Pi_{qq'}^{mm'} F.$$

Maintenant F c'est le développement dans le cas des excentricités nulles, tel qu'il a été obtenu au Chapitre précédent. Soit

$$\sum A E^{i(p\zeta+p'\zeta')}$$

ce développement. Nous sommes conduits à calculer

$$\Pi_{qq'}^{mm'} [A E^{i(p\zeta+p'\zeta')}] ;$$

pour appliquer cet opérateur à la fonction $A E^{i(p\zeta+p'\zeta')}$ il faut faire subir à cette fonction diverses différentiations par rapport à

$$\log \alpha, \log \alpha', \zeta, \zeta' ;$$

mais, pour la différentier par rapport à ζ ou à ζ' , il suffit évidemment de la multiplier par $i\rho$ ou $i\rho'$. Nous pouvons donc l'écrire

$$\Pi_{qq'}^{mm'} [A E^{i(p\zeta+p'\zeta')}] = E^{i(p\zeta+p'\zeta')} \Pi_{qq'}^{mm'} (A).$$

Dans le premier membre $\Pi_{qq'}^{mm'}$ a le même sens que plus haut; c'est un polynome entier par rapport à D, D', D_1, D'_1 ; dans le second membre, c'est le même polynome, mais où les symboles D_1, D'_1 sont remplacés par les quantités $i\rho$ et $i\rho'$. Il ne contient donc plus que deux symboles d'opération D et D' et il est appliqué à la fonction A qui ne dépend plus que de $\log \alpha$ et $\log \alpha'$.

Il reste finalement

$$\frac{I}{\Delta} = F_1 = \sum e^m e'^{m'} E^{i(p\zeta+p'\zeta'+q\zeta+q'\zeta')} \Pi_{qq'}^{mm'} A.$$

Le coefficient du terme en

$$e^m e'^{m'} E^{i(p\zeta+p'\zeta'+q\zeta+q'\zeta')}$$

est donc

$$\Pi_{qq'}^{mm'} A,$$

A désignant le coefficient du terme en

$$E^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

lequel, ne dépendant pas des excentricités, a été déterminé au Chapitre précédent.

274. Nous avons vu au n° 240 qu'il est aisé de passer du

développement procédant suivant les anomalies excentriques au développement procédant suivant les anomalies moyennes. Nous pouvons donc nous proposer, au lieu de former *directement* ce dernier développement, d'y parvenir indirectement et par l'intermédiaire du premier. C'est ce qu'a fait M. Newcomb.

A cet effet nous prendrons comme variables l'inclinaison mutuelle des orbites et, pour chaque planète, le logarithme du grand axe, l'excentricité, l'anomalie excentrique u et ce qu'on pourrait appeler la *longitude excentrique*, c'est-à-dire l'anomalie excentrique, plus la longitude du périhélie, toujours comptée à partir du nœud. Nous chercherons alors à former le développement

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{1}{\Delta} = \sum A e^m e'^{m'} E^{i(p\eta + p'\eta' + qu + q'u')}$$

où u et u' désignent les deux anomalies excentriques, η et η' les deux longitudes excentriques.

275. M. Newcomb introduit encore une autre simplification en posant

$$e = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad e' = \frac{2\varepsilon'}{1 + \varepsilon'^2}.$$

Il cherche ensuite à développer, non plus suivant les puissances de e et e' , mais suivant celles de ε et ε' de façon à obtenir le développement

$$(3 \text{ ter}) \quad \frac{1}{\Delta} = \sum A \varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(p\eta + p'\eta' + qu + q'u')}.$$

Il est clair qu'il est aisé de passer du développement (3 ter) au développement (3 bis) et de là au développement (3).

Si nous posons

$$e = \sin \varphi,$$

il vient

$$\varepsilon = \tan \frac{\varphi}{2}.$$

Remarquons en passant que les éléments *canoniques* ξ_1 et η_1 du n° 58 sont proportionnels à $\sin \frac{\varphi}{2}$.

276. Il y a des termes des développements (3), (3 bis) et

(3^{ter}) qui sont connus; ce sont ceux où

$$m = m' = q = q' = 0,$$

les seuls qui subsistent quand les excentricités sont nulles; nous les avons déterminés au Chapitre précédent. Ils sont d'ailleurs les mêmes pour les trois développements, sauf la substitution de η et η' à ζ et ζ' .

De ces termes connus, il s'agit de déduire les autres; et, pour cela, que nous adoptions les variables du n° 274 ou celles du n° 275, il nous suffira d'opérer tout à fait de la même manière qu'au n° 273; on n'aura qu'à faire jouer à

$$e, e', \eta, \eta', u, u'$$

ou à

$$\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta', u, u'$$

le rôle que jouaient au n° 273 les quantités

$$e, e', \zeta, \zeta', l, l'.$$

On trouvera comme au n° 273 que le coefficient de

$$e^m e'^{m'} E^{i(p\eta + p'\eta' + qu + q'u')}$$

ou celui de

$$\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(p\eta + p'\eta' + qu + q'u')}$$

sera

$$\Pi_{qq'}^{mm'} A,$$

A désignant le coefficient du terme en

$$E^{i(p\eta + p'\eta')},$$

tandis que $\Pi_{qq'}^{mm'}$ est un opérateur qui n'est autre chose que le coefficient de

$$e^m e'^{m'} E^{i(qu + q'u')}$$

ou de

$$\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(qu + q'u')}$$

dans le développement de l'expression symbolique

$$(7) \quad \left(\frac{r}{a}\right)^D \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{i p(\nu - \eta) + i p'(\nu' - \eta')},$$

suivant les puissances de $e E^{\pm iu}$, $e' E^{\pm iu'}$ ou celles de $\varepsilon E^{\pm iu}$, $\varepsilon' E^{\pm iu'}$.

On remarquera que, dans l'expression (7), j'ai remplacé D , et D' ,

par ip et ip' , ainsi que nous avons démontré qu'on devait le faire à la fin du n° 273.

Seulement les opérateurs Π sont beaucoup plus simples quand on adopte les variables du n° 274 et surtout quand on adopte celles du n° 275.

277. Il y a d'abord une remarque que nous devons faire et qui restera vraie que l'on adopte les variables des n°s 273, 274 ou 275. L'expression symbolique (6) est le produit de deux autres

$$(8) \quad \left(\frac{r}{a}\right)^D E^{D_1(\nu-\zeta)}, \quad \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{D'_1(\nu'-\zeta')}.$$

Il en est de même de l'expression (7), à la condition bien entendu de changer ζ et ζ' en η et η' ; quant à D_1 et D'_1 ils peuvent être remplacés par ip et ip' , ainsi que nous l'avons dit.

La première des deux expressions (8) ne dépend que de $eE^{\pm i\iota}$, ou de $eE^{\pm iu}$, ou de $\epsilon E^{\pm iu}$, la seconde au contraire ne dépend que de $e'E^{\pm i\iota'}$ ou de $e'E^{\pm iu'}$, ou de $\epsilon' E^{\pm iu'}$.

Appliquant en conséquence une remarque faite au n° 272, nous voyons que l'opérateur Π à quatre indices peut être considéré comme le produit de deux opérateurs à deux indices

$$(9) \quad \Pi_{qq'}^{mm'} = \Pi_{q0}^{m0} \Pi_{0q'}^{0m'}.$$

Le premier facteur dépend seulement de D et de D_1 , c'est-à-dire de D et de p ; le second de D' et de D'_1 , c'est-à-dire de D' et de p' . Mais de plus nous avons une relation entre D et D' . En effet,

$$DF = \frac{dF}{d \log a} = a \frac{dF}{da}$$

et de même

$$D'F = a' \frac{dF}{da'}.$$

Mais la fonction $\frac{1}{\Delta}$ est homogène et de degré -1 en a et en a' . Cette propriété n'est altérée ni par l'opération D , ni par l'opération D' , elle appartiendra donc à toutes les fonctions auxquelles nous aurons à appliquer soit l'opérateur D , soit l'opérateur D' ; de sorte qu'on aura

$$a \frac{dF}{da} + a' \frac{dF}{da'} = -F,$$

c'est-à-dire

$$D + D' = -1.$$

Cela nous permet d'exprimer D' en fonction de D de sorte que nos opérateurs Π seront des polynômes entiers par rapport à l'opérateur simple D et par rapport aux entiers p et p' .

278. On rencontre de plus grandes simplifications encore quand on adopte les variables du n° 275. On a alors, en effet,

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u = \frac{1 - 2\varepsilon \cos u + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2},$$

d'où

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D = (1 + \varepsilon^2)^{-D} (1 - \varepsilon E^{iu})^D (1 - \varepsilon E^{-iu})^D.$$

Reste le facteur

$$E^{D_1(\nu - \eta)}.$$

On observera que, en vertu de l'équation des aires,

$$r^2 \frac{dv}{dt} = n a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

$$\frac{r^2}{a^2} \frac{dv}{dl} = \sqrt{1 - e^2},$$

d'autre part

$$\frac{dl}{du} = 1 - e \cos u = \frac{r}{a},$$

d'où

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos u} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon \cos u + \varepsilon^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon E^{iu}} + \frac{\varepsilon E^{-iu}}{1 - \varepsilon E^{-iu}},$$

$$\frac{dv}{du} = 1 + \sum \varepsilon^m E^{miu} + \sum \varepsilon^m E^{-miu}$$

et en intégrant

$$v = \eta + \sum \frac{\varepsilon^m E^{miu}}{mi} - \sum \frac{\varepsilon^m E^{-miu}}{mi}.$$

On voit que

$$E^{D_1(\nu - \eta)}$$

se décomposera en deux facteurs, le premier dépendant seulement de εE^{iu} comme le deuxième facteur de $\left(\frac{r}{a}\right)^D$, le deuxième dépendant seulement de εE^{-iu} comme le troisième facteur de $\left(\frac{r}{a}\right)^D$. Mais

il vaut mieux opérer comme il suit. Considérons l'expression

$$\frac{r}{a} E^{i\nu}.$$

Si la longitude du périhélie est, pour un instant, supposée nulle, elle est égale à

$$\cos u - e + i \sin u \sqrt{1 - e^2} = \frac{E^{iu} (1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 E^{-iu})}{1 + \varepsilon^2}$$

ou à

$$\frac{E^{iu}}{1 + \varepsilon^2} (1 - \varepsilon E^{-iu})^2.$$

On aura donc, quelle que soit la longitude du périhélie,

$$\frac{r}{a} E^{i(\nu - \eta)} = \frac{(1 - \varepsilon E^{-iu})^2}{1 + \varepsilon''}.$$

Reprenons l'expression symbolique

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D E^{D i(\nu - \eta)} = \left(\frac{r}{a}\right)^{D-p} E^{i p(\nu - \eta)} \left(\frac{r}{a}\right)^p,$$

elle pourra s'écrire

$$(1 + \varepsilon^2)^{-D} (1 - \varepsilon E^{iu})^{D-p} (1 - \varepsilon E^{-iu})^{D+p}.$$

Or, on a par la formule du binôme

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon^2)^D &= \sum \frac{(D - k + 1, k)}{k!} \varepsilon^{2k}, \\ (1 - \varepsilon E^{iu})^{D-p} &= \sum \frac{(D - p - k' + 1, k')}{k'!} (-\varepsilon)^{k'} E^{ik'u}, \\ (1 - \varepsilon E^{-iu})^{D+p} &= \sum \frac{(D + p - k'' + 1, k'')}{k''!} (-\varepsilon)^{k''} E^{-ik''u}, \end{aligned}$$

la notation (D, k) ayant même sens qu'au Chapitre précédent. Ces formules nous donnent immédiatement nos opérateurs Π . Si, en effet, nous tenons compte seulement d'abord des deux derniers facteurs et que nous posions

$$(1 - \varepsilon E^{iu})^{D+p} (1 - \varepsilon E^{-iu})^{D+p} = \sum H_q^m \varepsilon^m E^{iqu},$$

il viendra

$$H_q^m = (-1)^m \frac{\left(D - p - 1 - \frac{m+q}{2}, \frac{m+q}{2}\right) \left(D - p + 1 - \frac{m-q}{2}, \frac{m+q}{2}\right)}{\frac{m-q}{2}! \frac{m-q}{2}!}$$

et ensuite

$$\Pi_{q0}^{m0} = H_q^m + \frac{(D, 1)}{1!} H_q^{m-2} + \frac{(D-1, 2)}{2!} H_q^{m-4} + \dots$$

ou en mettant en évidence le terme général

$$\Pi_{q0}^{m0} = \sum \frac{(D - k + 1, k)}{k!} H_q^{m-2k}.$$

On voit que tous nos opérateurs se présentent sous la forme de polynômes entiers en D.

M. Chassin préfère, au lieu de passer par les intermédiaires des développements (3 *ter*) et (3 *bis*), former directement les opérateurs qui donnent le développement (3). Ces opérateurs sont encore des polynômes en D, mais dont les coefficients sont beaucoup plus compliqués; mais M. Chassin a donné dans l'*Astronomical Journal* des relations de récurrence qui en facilitent beaucoup le calcul.

279. Une fois les opérateurs formés, il est aisé d'obtenir les développements eux-mêmes. Au Chapitre précédent, nous avons développé $\frac{1}{\Delta}$ en supposant les excentricités nulles et cela sous plusieurs formes différentes. Nous avons trouvé d'abord

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B \frac{\alpha^m}{\alpha'^{m+1}} E^{i(p\zeta + p'\zeta')},$$

B étant égal à un polynôme de Gauss en $v = \sin^2 \frac{J}{2}$, multiplié par un facteur numérique et par des puissances de $\mu = \cos^2 \frac{J}{2}$ et $v = \sin^2 \frac{J}{2}$. C'est la formule (27) du Chapitre précédent. Il s'agit alors de voir ce que c'est que

$$D \frac{\alpha^m}{\alpha'^{m+1}}, \quad D' \frac{\alpha^m}{\alpha'^{m+1}},$$

on trouve

$$m \frac{\alpha^m}{\alpha'^{m+1}}, \quad - (m-1) \frac{\alpha^m}{\alpha'^{m+1}}.$$

Il suffit donc de remplacer D, D', D_1, D'_1 par $m, -(m+1), ip, ip'$; notre expression (6) devient tout simplement

$$\left(\frac{r}{\alpha}\right)^m \left(\frac{r'}{\alpha'}\right)^{-(m+1)} E^{i(p(\nu-\zeta)-i p'(\nu'-\zeta))},$$

et le développement (3) est ramené au suivant :

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B \frac{r^m}{r'^{m+1}} E^{i(p\nu+p'\nu')},$$

formule d'ailleurs évidente sans tant de détours.

Nous avons trouvé aussi une autre forme de développement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B \frac{1}{\alpha'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)} E^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

où B est égal à $\mu^{\frac{p+p'}{2}} \nu^{\frac{p-p'}{2}}$, multiplié par la différence des carrés de deux polynômes de Gauss. C'est la formule (26) du Chapitre précédent. Cette fois l'emploi des opérateurs se justifie. Il faut appliquer nos opérateurs Π à

$$\frac{1}{\alpha'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)},$$

et pour cela il faut savoir appliquer à cette expression l'opérateur simple D une ou plusieurs fois; or, on trouve

$$D \frac{1}{\alpha'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(k)}}{dx},$$

et les expressions

$$D^m \frac{1}{\alpha'} b_{\frac{1}{2}}^{(k)}$$

s'exprimeraient de même très simplement à l'aide des dérivées supérieures du coefficient de Laplace $b_{\frac{1}{2}}^{(k)}$. Or nous avons appris au n° 250 à calculer par des relations de récurrence les dérivées successives des coefficients de Laplace. Le problème peut donc être considéré comme entièrement résolu.

CHAPITRE XX.

CONVERGENCE DES SÉRIES.

280. Nous avons vu au n° 240 que la partie principale de la fonction perturbatrice $\frac{1}{\lambda}$ pouvait se développer, soit sous la forme

$$\sum B_{mm'} E^{l(mu+m'u')},$$

soit sous la forme

$$\sum A_{mm'} E^{l(ml+m'l')},$$

et au n° 242 que les coefficients de ces deux séries pouvaient s'exprimer par des intégrales définies

$$(1) \quad -4\pi^2 B_{mm'} = \int \int \frac{dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}$$

et

$$(2) \quad -4\pi^2 A_{mm'} = \int \int \frac{Q E^\Omega dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

où

$$x = E^i u, \quad y = E^{i'} u', \quad R = x^2 y^2 \Delta^2,$$

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] \left[1 - \frac{e'}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right]$$

$$2\Omega = me \left(x - \frac{1}{x} \right) + m' e' \left(y - \frac{1}{y} \right),$$

et où l'intégration doit être étendue, tant par rapport à x que par rapport à y , le long d'une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

Ces coefficients $B_{mm'}$, $A_{mm'}$ sont des fonctions de l'inclinaison, des excentricités, des longitudes des périhélie comptées à partir du nœud et enfin des grands axes. Nous avons appris dans les deux

Chapitres précédents à développer ces fonctions suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons et il s'agit maintenant de savoir quelles sont les conditions de convergence de ces séries.

Nous n'aurons pour cela qu'à appliquer la méthode de Cauchy et à chercher les points singuliers de ces fonctions.

281. Nous sommes donc ainsi amenés à expliquer comment on trouve les points singuliers des fonctions représentées par des intégrales définies et d'abord par des intégrales définies simples.

Soit

$$\int R(x, z) dx,$$

une intégrale définie prise par rapport à x le long d'un certain contour : cette intégrale sera alors fonction du paramètre z .

Pour que pour cette fonction une valeur de z soit critique, il faut d'abord que l'un des points singuliers de $R(x, z)$, considérée comme fonction de x , se trouve sur le contour d'intégration.

Mais, comme on peut déformer ce contour d'une manière continue, on peut le faire fuir devant le point singulier, et l'on n'est arrêté que lorsque ce contour se trouve pris entre deux points singuliers et ne peut plus fuir.

On obtiendra donc toutes les valeurs critiques de z , en exprimant que deux des points singuliers de R , considérée comme fonction de x , se confondent. Mais toutes les valeurs critiques ainsi trouvées ne conviennent pas; il faut, en effet, que les deux points singuliers qui se confondent ainsi soient, avant de s'être confondus, de part et d'autre du contour; c'est seulement à cette condition que le contour, pris entre deux feux, ne peut plus fuir.

Soit donc

$$\varphi(x, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction $R(x, z)$ présente une singularité, et supposons qu'elle se décompose en un certain nombre d'équations indépendantes, trois par exemple :

$$\varphi_1(x, z) = 0, \quad \varphi_2(x, z) = 0, \quad \varphi_3(x, z) = 0.$$

On obtiendra les valeurs critiques de z de l'une des deux manières suivantes :

1° En annulant deux des trois fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, et en écri-

vant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \varphi_2(x, z) = 0.$$

En éliminant x et résolvant par rapport à z , on aura une valeur critique de z .

2° En annulant l'une de ces trois fonctions et sa dérivée et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

On aura encore une valeur critique de z , en éliminant x et résolvant par rapport à z .

282. Considérons maintenant une intégrale double

$$\int \int R(x, y, z) dx dy.$$

envisagée comme fonction du paramètre z et étendue à un champ quelconque.

Le cas particulier le plus simple est celui où l'on doit intégrer par rapport à x , le long d'un contour fixe indépendant de y , et par rapport à y , le long d'un contour fixe indépendant de x . C'est précisément ce cas particulier simple que l'on rencontre en ce qui concerne les intégrales (1) et (2).

Ici, en effet, les deux contours C_x et C_y indépendants, le premier de y , le second de x , sont deux circonférences de centre zéro et de rayon 1, le premier dans le plan des x , le second dans le plan des y .

Soient donc C_x et C_y les deux contours fixes d'intégration par rapport à x et à y . Soit

$$\theta(y, z) = \int R(x, y, z) dx,$$

l'intégrale étant prise le long de C_x .

Notre intégrale double sera alors

$$\eta(z) = \int \theta(y, z) dy,$$

l'intégrale étant prise le long de C_y .

Nous n'avons plus qu'à appliquer les principes du numéro précédent aux deux intégrales simples

$$\int R \, dx, \quad \int \theta \, dy.$$

Nous devons observer toutefois que nous risquons de n'obtenir ainsi que des conditions nécessaires et pas suffisantes. En effet, nous avons observé plus haut que toutes les valeurs critiques ne conviennent pas.

On obtiendra d'autres conditions également nécessaires en changeant de coordonnées, et en particulier en permutant x et y , c'est-à-dire en intervertissant l'ordre des intégrations.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction R a une singularité.

Décomposons cette équation en équations irréductibles

$$(3) \quad \varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z) = 0.$$

On obtiendra les singularités de la fonction $\theta(y, z)$:

1° En annulant deux des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

2° En annulant une des trois fonctions et sa dérivée et écrivant

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

Ces singularités peuvent ne pas toutes convenir, car il peut arriver que les deux points singuliers, qui se confondent, soient d'un même côté du contour d'intégration.

Pour avoir les singularités de $\tau_1(z)$, considérons maintenant celles de $\theta(y, z)$, qui nous seront données par des systèmes d'équations de l'une des deux formes

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0, \\ \varphi_1 &= \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \end{aligned}$$

et cherchons les conditions pour que deux de ces singularités se confondent.

Si nous considérons z comme un paramètre, x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, les équations (3) représentent un certain nombre de courbes planes.

Les singularités de \mathfrak{H} données par un système d'équations de la forme

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

correspondront aux points d'intersection de ces courbes; celles qui seront données par un système de la forme

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

correspondront aux points de contact d'une de ces courbes avec une tangente parallèle à l'axe des y .

Pour que deux de ces singularités se confondent, il faut :

1° Ou bien que trois des fonctions φ s'annulent à la fois

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0;$$

2° Ou bien que l'on ait à la fois

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \quad \varphi_2 = 0;$$

mais, comme la condition ne doit pas dépendre du choix des coordonnées, et qu'en particulier elle doit subsister quand on permute x et y , on devra avoir aussi

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0,$$

ce qui veut dire que l'une des courbes (3) aura un point double;

3° Ou bien que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre;

4° Ou enfin que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre. Mais cela entraîne : ou bien

$$\frac{dz_1}{dy} = 0.$$

ou bien $\frac{d^2 z_1}{dx^2} = 0$: mais, comme la condition ne doit pas changer quand on permute x et y , on devra avoir dans tous les cas

$$z_1 = \frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_1}{dy} = 0.$$

En résumé, les valeurs critiques de z sont :

- 1° Celles pour lesquelles trois des courbes (3) se coupent en un même point;
- 2° Celles pour lesquelles deux de ces courbes sont tangentes;
- 3° Celles pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Seulement toutes ces valeurs peuvent ne pas convenir, car les deux singularités qui se confondent peuvent être situées d'un même côté du contour d'intégration.

Et d'ailleurs nous avons vu que nos conditions ne sont que nécessaires.

283. Appliquons ces principes aux intégrales (1) et (2). La fonction sous le signe \int sera holomorphe tant par rapport à x et y que par rapport aux excentricités e et e' et à $\sin \frac{J}{2}$, J étant l'inclinaison.

Il y aura exception seulement :

- 1° Si $e = 1$ et $e' = 1$ (condition où x et y n'interviennent pas et sur laquelle nous reviendrons);
- 2° Si x ou y est nul ou infini;
- 3° Si Δ s'annule, c'est-à-dire si

$$R = \Delta x^2 y^2,$$

qui est un polynome entier du sixième ordre en x, y , est égal à zéro.

Cela est vrai quels que soient les entiers m et m' ; cela est vrai

d'ailleurs aussi bien de l'intégrale (2) que de l'intégrale (1), car

$$Q \text{ et } E^{\Omega}$$

ne cessent d'être holomorphes que si x ou y est nul ou infini.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3), c'est-à-dire celles dont les équations expriment que la fonction sous le signe \int cesse d'être holomorphe, se réduisent donc, en ce qui concerne les intégrales (1) et (2), aux quatre droites

$$(4) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty$$

et à la courbe du sixième degré

$$(4 \text{ bis}) \quad R = 0.$$

Cette dernière, dans le cas où l'inclinaison est nulle, se décompose en deux courbes du troisième degré

$$(4 \text{ ter}) \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0.$$

Pour trouver les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons, nous devons donc chercher celles pour lesquelles trois des courbes (4) ou (4 bis) se coupent, ou pour lesquelles deux de ces courbes se touchent, ou pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Mais, comme ces courbes sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2), les valeurs pour lesquelles une de ces trois circonstances se présentera seront également les mêmes pour les intégrales (1) et (2).

Ainsi les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons sont les mêmes pour les deux intégrales (1) et (2).

Mais une question pourrait encore se poser; nous avons vu que toutes les valeurs critiques ne conviennent pas. Ne pourrait-il se faire qu'une de ces valeurs convînt à (1) sans convenir à (2) ou inversement.

La réponse doit être négative. Comment se fait-il, en effet, que certaines valeurs critiques conviennent et que d'autres ne conviennent pas? Pour nous en rendre compte, faisons varier d'une manière continue l'un de nos paramètres, par exemple l'excentricité e , et, en même temps, déformons d'une manière continue les contours d'intégration. Nous devons diriger cette déformation de

telle sorte qu'aucune des valeurs singulières définies par les équations (4) et (4 bis) ne se trouve dans le champ d'intégration. Si, e variant d'une manière continue depuis zéro jusqu'à e_0 , on peut s'arranger de façon que cette condition ne cesse jamais d'être remplie, c'est que e_0 n'est pas une véritable valeur critique; e_0 ne convient pas; si, au contraire, il est impossible de s'arranger pour que la condition soit remplie (parce que, comme je l'expliquais plus haut, le contour d'intégration se trouve pris entre deux points singuliers), c'est que e_0 est une véritable valeur critique; e_0 convient.

Faisons donc varier e de zéro à e_0 et, en même temps, déformons nos contours d'intégration en partant des contours initiaux

$$|x| = 1, \quad |y| = 1$$

qui sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2); si e_0 ne convient pas à l'intégrale (1), c'est que nous pouvons déformer nos contours de telle façon qu'à aucun moment une des valeurs singulières satisfaisant aux équations (4) et (4 bis) ne se trouve dans le champ d'intégration. Mais, si cette condition ne cesse jamais d'être remplie en ce qui concerne l'intégrale (1), elle ne cessera jamais non plus de l'être en ce qui concerne l'intégrale (2), puisque les équations (4) et (4 bis) qui définissent les valeurs singulières sont les mêmes pour (1) et pour (2). Donc e_0 ne conviendra pas non plus à l'intégrale (2). C. Q. F. D.

Voici donc un premier résultat.

Les coefficients $B_{m,m'}$ du développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies excentriques, ainsi que les coefficients $A_{m,m'}$ du développement suivant les anomalies moyennes sont eux-mêmes développables suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Les limites de convergence de ces nouveaux développements sont les mêmes pour les coefficients $B_{m',m'}$ et pour les coefficients $A_{m',m'}$; elles sont les mêmes pour tous ces coefficients quels que soient les entiers m et m' .

284. Nous examinerons spécialement le cas où les excentricités sont nulles et celui où l'inclinaison est nulle.

Dans le cas où les excentricités sont nulles, il n'y a plus à faire de distinction entre les anomalies excentriques et les anomalies moyennes, de sorte que

$$Q = 1, \quad \Omega = 0, \\ A_{mm'} = B_{mm'} = \frac{-1}{4\pi^2} \iint \frac{dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}.$$

Cette dernière intégrale peut encore s'écrire

$$\iint \frac{dx dy}{x^{m+1} y^{m'+1} \Delta},$$

ou bien en posant comme au n° 289

$$z = \frac{x}{y}, \quad w = xy,$$

nous pouvons encore l'écrire

$$\frac{1}{2} \iint \frac{dz dw}{x^m y^{m'+2} \Delta} = \frac{1}{2} \iint \frac{dz dw}{z^p w^{p'} \Delta},$$

en posant

$$p = \frac{m - m' - 2}{2}, \quad p' = \frac{m + m' + 2}{2}.$$

Quand x et y décrivent chacun dans leur plan des circonférences de rayon 1, z et w font de même; mais, à chaque couple de valeurs de z et w situées sur ces circonférences, correspondent deux couples de valeurs de x et de y ; on obtient donc deux fois l'intégrale, de sorte que, finalement, nous pourrions écrire

$$(5) \quad -4\pi^2 A = \iint \frac{dz dw}{z^p w^{p'} \Delta},$$

l'intégration étant étendue, tant pour z que pour w , à une circonférence de rayon 1 ayant son centre à l'origine, de telle façon que

$$|z| = |w| = 1.$$

Il sera plus commode d'opérer sur l'intégrale (5) que sur l'intégrale (1). Nous avons alors

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 + \mu a a' \left(z + \frac{1}{z} \right) + \nu a a' \left(w + \frac{1}{w} \right).$$

Nos courbes singulières sont alors

$$z = 0, \quad w = 0, \quad z = \infty, \quad w = \infty, \quad \Delta^2 = 0.$$

Nous devons alors chercher la condition pour que trois de ces courbes se coupent en un même point, ou pour que deux d'entre elles se touchent, ou pour que l'une ait un point double.

Nous n'avons pas à nous inquiéter de la première condition, la courbe $\Delta^2 = 0$ passe *toujours* par l'origine; or, pour qu'une fonction définie par une intégrale définie présente un point singulier, il faut que deux points singuliers de la fonction sous le signe \int *primitivement séparés* viennent à se confondre; c'est-à-dire, par exemple, que trois courbes singulières qui *primitivement ne passaient pas par un même point* viennent à passer par un même point. Ce n'est pas ici le cas, puisque les trois courbes $\Delta^2 = 0$, $z = 0$, $w = 0$ passent *toujours* par un même point.

De même la courbe $\Delta^2 = 0$ passe toujours par les points

$$z = 0, \quad w = \infty; \quad z = \infty, \quad w = 0; \quad z = w = \infty,$$

de sorte que nous n'avons pas à nous inquiéter de cette condition.

Pour que $z = 0$ ou $z = \infty$ touche $\Delta^2 = 0$, il faut que

$$\mu aa' = 0 \quad \text{soit} \quad \mu = 0.$$

Pour que $w = 0$, ou $w = \infty$ touche $\Delta^2 = 0$, il faut que

$$\nu aa' = 0 \quad \text{soit} \quad \nu = 0.$$

Pour que $\Delta^2 = 0$ ait un point double, il faut

$$\frac{d\Delta^2}{dw} = \frac{d\Delta^2}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire

$$w = \pm 1, \quad z = \pm 1$$

et

$$(6) \quad a^2 + a'^2 \pm 2\mu aa' \pm 2\nu aa' = 0.$$

285. Examinons de plus près ces résultats. Nous verrons d'abord que les solutions $\mu = 0$ ou $\nu = 0$ ne pouvaient convenir à la question. Supposons, en effet, d'abord que, remplaçant μ par $1 - \nu$, on développe suivant les puissances de ν . Si la valeur $\nu = 0$ était

un véritable point singulier pour la branche de la fonction considérée, le développement suivant les puissances de ν serait toujours divergent; or nous savons qu'il n'en est pas ainsi.

Si la valeur $\mu = 0$ ou $\nu = 1$ était un point singulier, nous devrions en conclure que la série diverge dès que $|\nu| > 1$, mais nous n'aurions pas à nous inquiéter de cette conséquence puisque ν est toujours < 1 .

Supposons maintenant que l'on développe suivant les puissances de μ et ν regardées comme des variables indépendantes; si $\mu = 0$, ou bien $\nu = 0$ était un véritable point singulier pour la branche de fonction considérée, le développement serait toujours divergent, et nous savons qu'il n'en est pas ainsi et que le développement converge pourvu que μ et ν soient assez petits.

Il est aisé d'ailleurs de constater que, pour les petites valeurs de μ et ν , les points singuliers qui se confondent pour $\nu = 0$, par exemple, sont tous deux intérieurs, ou tous deux extérieurs au contour d'intégration. On pourrait toutefois se demander s'il en serait encore de même pour des valeurs plus grandes de μ . Mais la réponse est aisée; si les deux points singuliers sont tous deux intérieurs au contour pour μ petit, puis que nous fassions varier μ d'une manière continue, les deux points singuliers A et B et le contour varieront aussi d'une manière continue, mais ces deux points ne pourront cesser d'être intérieurs au contour que si l'un d'eux, A par exemple, franchit le contour; mais alors, nous pourrions toujours faire *fuir* le contour devant le point A, à moins que ce point A ne se confonde avec un autre point singulier C primitivement extérieur au contour, différent par conséquent du point B. Mais alors la convergence cesserait déjà par suite de la coïncidence des points A et C. On n'a donc pas à s'inquiéter de la coïncidence possible des points A et B puisqu'elle ne pourrait amener une singularité de notre fonction, qu'*après* que la convergence aurait déjà cessé pour d'autres causes.

Ainsi les points singuliers $\mu = 0$, $\nu = 0$ ne conviennent pas à la branche de fonction considérée; nous devons ajouter qu'ils pourraient convenir à d'autres branches de la fonction qui seraient définies par l'intégrale (5) étendue à d'autres contours que celui qui est défini par les deux équations

$$|z| = |\varpi| = 1.$$

286. Pour la branche étudiée, nous n'avons donc à nous préoccuper que de la condition (6).

Posons $\nu = \sin^2 \frac{J}{2}$ et proposons-nous de développer suivant les puissances croissantes de ν . La condition (5) devient

$$a^2 + a'^2 + 2aa'[\pm(1-\nu) \pm \nu] = 0,$$

ce qui peut s'écrire de l'une des deux manières suivantes

$$(5 \text{ bis}) \quad (a' \pm a)^2 = 0; \quad a^2 + a'^2 \pm 2aa'(1-2\nu) = 0.$$

Dans la première de ces relations ν n'entre pas; la seconde donne

$$\pm \nu = \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'}.$$

Le rayon de convergence sera donc la plus petite des deux valeurs

$$\left| \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'} \right|,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(a' - a)^2}{4aa'}.$$

Ainsi la condition de convergence du développement sera

$$\sin^2 \frac{J}{2} < \frac{(a' - a)^2}{4aa'}.$$

La discussion des équations (5 bis) montrerait de même que les coefficients $A_{m,m'}$ sont développables suivant les puissances de a , pourvu que

$$a < a'.$$

Considérons maintenant μ et ν comme des variables indépendantes et développons suivant les puissances de μ et ν .

La relation (6), qui définit les limites de convergence, s'écrit alors

$$a^2 + a'^2 \pm 2aa'\mu \pm 2aa'\nu = 0$$

ou

$$\pm \mu \pm \nu = \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

La condition de convergence du développement est donc

$$|\mu| + |\nu| < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Cette condition est toujours remplie, car on a

$$\begin{aligned} |\mu| &= \mu; \quad |\nu| = \nu; \\ |\mu| + |\nu| &= 1 < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}. \end{aligned}$$

Nos coefficients sont donc toujours développables suivant les puissances de $\cos^2 \frac{J}{2}$ et $\sin^2 \frac{J}{2}$.

Nous avons donné, au n° 270, un développement qui procède suivant les puissances de

$$\frac{\mu x}{1+x^2}, \quad \frac{\nu x}{1+x^2};$$

c'est le développement (28) du Chapitre XVIII. D'après ce qui précède, ce développement converge pourvu que

$$\left| \frac{\mu x}{1+x^2} \right| + \left| \frac{\nu x}{1+x^2} \right| < 1.$$

Or, comme μ , ν et x sont essentiellement positifs et plus petits que 1, que $\frac{x}{1+x^2}$ est, par conséquent, plus petit que $\frac{1}{2}$ et que $\mu + \nu = 1$, on aura

$$\left| \frac{\mu x}{1+x^2} \right| + \left| \frac{\nu x}{1+x^2} \right| = (\mu + \nu) \frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2}.$$

La condition de convergence sera donc toujours remplie.

Du développement (28) du Chapitre VIII on passerait aisément au développement (27) qui procède suivant les puissances de x , μ et ν , il suffirait de développer chaque terme en

$$\left(\frac{\mu x}{1+x^2} \right)^m \left(\frac{\nu x}{1+x^2} \right)^n$$

suivant les puissances de x , ce qui est possible pourvu que $x < 1$. Comme cette condition est toujours remplie, le développement (27) converge toujours.

287. Considérons maintenant le cas particulier où l'inclinaison est nulle et développons suivant les puissances des excentricités e et e' .

Les courbes qui correspondent aux courbes (3) sont les courbes (4) et (4 *ter*), à savoir

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0.$$

1° Cherchons d'abord la condition pour que $R_1 = 0$ ait un point double. Pour nous en rendre compte, cherchons la signification de ces équations. Soient C l'orbite de la première planète, C' celle de la seconde; d'après notre hypothèse ces deux coniques sont dans un même plan. A chaque valeur de x correspond un point M de la conique C et à chaque valeur de y un point M' de la conique C'.

L'équation $R = 0$ exprime alors que la distance MM' est nulle, ce qui peut ne pas vouloir dire que les deux points M et M' coïncident puisque ces deux points peuvent être imaginaires.

L'équation $R_1 = 0$ exprime que le coefficient angulaire de la droite MM' est égal à $\sqrt{-1}$ et l'équation $R_2 = 0$ exprime que ce coefficient est égal à $-\sqrt{-1}$.

Les équations $x = 0$, $x = \infty$ expriment que le point M est à l'infini sur l'une des deux branches infinies de la conique C; les équations $y = 0$, $y = \infty$ expriment que le point M' est à l'infini sur la conique C'.

Pour que la courbe $R_1 = 0$ ait un point double, il faut et il suffit que la droite MM' soit tangente à la fois aux deux coniques C et C'. Les deux coniques C et C' ont un foyer commun, le Soleil. La droite MM', qui est une tangente isotrope à C, doit passer par un des foyers de C, et pour la même raison elle doit passer par un des foyers de C'. Soient alors S le foyer commun de C et C', R le second foyer de C, R' celui de C'.

Pour que les deux coniques admettent une tangente isotrope commune (en dehors de celle qui passe par S qui existe toujours et qui ne saurait convenir), il faut donc que la droite MM' passe par R et R'; c'est-à-dire que la droite RR' ait pour coefficient angulaire $\sqrt{-1}$. Cette condition s'exprime analytiquement comme il suit :

$$aeE^{-i\varpi} = a'e'E^{-i\varpi'}.$$

Je représente par ϖ et ϖ' les longitudes des périhélie.

C'est là la condition pour que $R_1 = 0$ ait un point double (en

dehors de celui qui, correspondant à la tangente isotrope passant par S, existe toujours et ne saurait convenir).

2° De même la condition pour que $R_2 = 0$ ait un point double s'écrit

$$aeE^{i\varpi} = a'e'E^{i\varpi'}.$$

3° Pour que les deux courbes $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ soient tangentes, il faut que les deux coniques C et C' se touchent; car les points d'intersection à distance finie des deux courbes $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ correspondent aux quatre points d'intersection des deux coniques.

Il faut donc que la distance des deux foyers R et R' soit égale à la somme ou à la différence des grands axes; ce qui s'écrit

$$(aeE^{i\varpi} - a'e'E^{i\varpi'})(aeE^{-i\varpi} - a'e'E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2.$$

4° Il faut voir ensuite si l'un des points d'intersection des courbes (4 *ter*) ne peut pas se confondre avec l'un des points d'intersection de l'une de ces courbes avec l'une des droites (4) ou de deux de ces droites entre elles.

Ces deux catégories de points correspondent respectivement : aux quatre intersections de C et de C' (M et M' confondus) et aux cas où les deux points M et M' sont à l'infini sur les deux coniques C et C'.

La condition est donc que l'une des quatre intersections de C et de C' s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire qu'une asymptote de C soit parallèle à une asymptote de C'.

Cela s'écrit d'une des quatre manières

$$\tan^2 \frac{\varphi}{2} E^{2i\varpi} = \tan^2 \frac{\varphi'}{2} E^{2i\varpi'},$$

$$\cot^2 \frac{\varphi}{2} E^{2i\varpi} = \tan^2 \frac{\varphi'}{2} E^{2i\varpi'},$$

$$\tan^2 \frac{\varphi}{2} E^{-2i\varpi} = \tan^2 \frac{\varphi'}{2} E^{-2i\varpi'},$$

$$\cot^2 \frac{\varphi}{2} E^{-2i\varpi} = \tan^2 \frac{\varphi'}{2} E^{-2i\varpi'},$$

en posant

$$e = \sin \varphi, \quad e' = \sin \varphi'.$$

Je puis écrire aussi

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - e^2}}{1 \mp \sqrt{1 - e^2}} E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - e'^2}}{1 \mp \sqrt{1 - e'^2}} E^{2i\varpi'},$$

en prenant dans chaque fraction le signe inférieur dans les deux termes ou le signe supérieur dans les deux termes.

Voici donc quelles sont les équations qui définissent les valeurs critiques

$$(7) \quad aeE^{-i\varpi} = a'e'E^{-i\varpi'},$$

$$(8) \quad aeE^{i\varpi} = a'e'E^{i\varpi'}.$$

$$(9) \quad (aeE^{i\varpi} - a'e'E^{i\varpi'})(aeE^{-i\varpi} - a'e'E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2,$$

$$(10) \quad \frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}} E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}} E^{2i\varpi'},$$

auxquelles il convient d'adjoindre

$$(11) \quad e = 1, \quad e' = 1.$$

Mais nous avons vu que toutes les valeurs ainsi trouvées peuvent ne pas convenir et il est même aisé de voir qu'elles ne peuvent pas toutes convenir.

En effet, envisageons l'équation (7); elle est satisfaite pour

$$e = e' = 0.$$

Si donc les valeurs critiques définies par cette équation convenaient, notre fonction présenterait des singularités pour des valeurs très petites de e et e' . Nos coefficients ne seraient pas développables suivant les puissances de e et de e' , *même pour des valeurs très petites de ces quantités*. Nous savons qu'il n'en est pas ainsi. Donc les valeurs définies par l'équation (7) ne sauraient convenir.

Le même raisonnement s'applique aux équations (8) et (10). Il importe de remarquer que l'équation (10), malgré la présence des doubles signes, ne représente qu'une seule équation analytique irréductible qui prendrait sa forme algébrique si l'on chassait les radicaux. Cette équation irréductible est satisfaite pour $e = e' = 0$.

Restent les équations (9) et (11). Pour trouver la limite de convergence définie par l'équation (9), remarquons que a , a' , ϖ et ϖ' sont des données de la question et sont réelles, mais que e et e' qui sont nos variables indépendantes pourront prendre des valeurs imaginaires.

Donnons à e une série de valeurs de module constant $|e|$, mais

d'argument variable; faisons de même pour e' . Le maximum du module du premier membre de (9) est

$$\alpha^2 |e^2| + \alpha'^2 |e'^2| + 2\alpha\alpha' |ee' \cos(\varpi - \varpi')|;$$

la condition de convergence est donc

$$\alpha^2 |e^2| + \alpha'^2 |e'^2| + 2\alpha\alpha' |ee' \cos(\varpi - \varpi')| < (\alpha' - \alpha)^2.$$

Nous sommes ainsi conduits à supposer que les seules conditions de convergence de notre développement sont

$$(12) \quad \begin{cases} |e| < 1, & |e'| < 1, \\ \alpha^2 |e^2| + \alpha'^2 |e'^2| + 2\alpha\alpha' |ee' \cos(\varpi - \varpi')| < (\alpha' - \alpha)^2. \end{cases}$$

Je ne voudrais pas entrer dans trop de détails; je ne puis cependant me contenter d'un aperçu : il faut donc que j'explique en quelques mots comment on peut donner à la démonstration toute sa rigueur.

Considérons le domaine D défini par les inégalités (12). Il ne contient pas de valeurs singulières satisfaisant aux équations (9) et (11). Mais il en contient qui satisfont aux équations (7), (8), (10). Si l'une de ces valeurs convenait, il en serait de même de toutes celles qui satisferaient à la même équation et qu'on pourrait rencontrer en faisant varier e et e' d'une manière continue et sans cesser de satisfaire à cette équation. Cela serait vrai au moins en ce qui concerne la détermination de la fonction que l'on atteindrait par cette variation continue.

Or on verrait qu'on peut atteindre, par une variation continue, une quelconque des valeurs singulières qui satisfont aux équations (7), (8), (10) et aux inégalités (12) en partant de la valeur $e = 0$, $e' = 0$ et sans cesser de satisfaire à ces équations et sans sortir du domaine D. La valeur singulière $e = 0$, $e' = 0$ ne convenant pas, aucune de ces valeurs ne convient.

Les conditions (12) sont donc les seules conditions de convergence.

La troisième condition (12) sera satisfaite quels que soient ϖ et ϖ' , si l'on a

$$|\alpha e| + |\alpha' e'| < \alpha' - \alpha,$$

c'est-à-dire si la distance périhélie de l'une des planètes est plus grande que la distance aphélie de l'autre.

288. Le théorème que nous avons appliqué à la fin du numéro précédent est analogue à celui que nous avons rencontré au n° 285 et pourrait s'établir de la même manière. Mais il vaut mieux le rattacher à un théorème d'Analyse.

Si, dans un domaine D simplement connexe, une fonction de deux variables $F(x, y)$ est holomorphe, sauf *peut-être* pour les points qui satisfont à une relation analytique

$$x = \varphi(y),$$

et si *un* de ces points

$$y = y_0, \quad x = \varphi(y_0)$$

est ordinaire, il en sera de même de tous les autres.

En effet, d'abord si ce point est ordinaire, il en sera de même de tous les points voisins.

Décrivons maintenant dans le plan des x un contour très petit, autour du point douteux $x = \varphi(y)$. Soit $x = \psi(y)$ un des points du contour. Nous pouvons supposer que le contour se déforme d'une manière continue quand y varie d'une manière continue, et que $\psi(y)$ est une fonction analytique.

Je dis d'abord que $F(x, y)$ est une fonction uniforme.

Supposons, en effet, qu'elle ne le soit pas, qu'à $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ soient deux de ses déterminations, et que l'on passe de l'une à l'autre quand x décrit le contour. Alors

$$F_1[\psi(y), y] - F_2[\psi(y), y] = \Theta(y)$$

serait une fonction analytique de y , mais cette fonction serait nulle pour $y = y_0$ et pour les valeurs voisines, puisque la fonction $F(x, y)$ est uniforme pour $y = y_0$ et pour les valeurs voisines. La fonction $\Theta(y)$ est donc nulle pour toutes les valeurs de y et, par conséquent, $F(x, y)$ est uniforme pour toutes les valeurs de y .

La fonction F étant uniforme, la condition pour que $x = \varphi(y)$ soit un point ordinaire, c'est que l'intégrale

$$\int x^m F(x, y) dx,$$

prise le long du contour, soit nulle quel que soit l'entier positif m .

Cette intégrale est une fonction analytique de y ; elle est nulle pour $y = y_0$ et pour les valeurs voisines puisque $x = \varphi(y_0)$ est un point ordinaire ainsi que les points voisins. Elle est donc identiquement nulle, et le point $x = \varphi(y)$ est ordinaire quel que soit y .

Le théorème s'étendrait aisément au cas où tous les points de D seraient ordinaires, sauf *peut-être* ceux qui satisfont à l'une des n relations analytiques

$$x = \varphi_1(y), \quad x = \varphi_2(y), \quad \dots, \quad x = \varphi_n(y),$$

et où l'on saurait, d'autre part, que les points

$$\begin{array}{ll} y = y_1, & x = \varphi_1(y_1), \\ y = y_2, & x = \varphi_2(y_2), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y = y_n, & x = \varphi_n(y_n) \end{array}$$

sont ordinaires.

Nous nous bornerons aux cas particuliers simples traités plus haut, bien que les mêmes procédés soient applicables au cas général. Nous mentionnerons toutefois que M. Féraud a traité d'autres cas particuliers dans le Tome X des *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*.



CHAPITRE XXI.

RELATIONS DE RÉCURRENCE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

289. Reprenons les équations du n° 280

$$(1) \quad -4\pi^2 B_{mm'} = \int \int \frac{dx \, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

$$(2) \quad -4\pi^2 A_{mm'} = \int \int \frac{QE^{\frac{1}{2}} dx \, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

qui définissent les coefficients du développement, soit suivant les anomalies excentriques, soit suivant les anomalies moyennes. Rappelons que

$$R = x^2 y^2 \Delta^2, \quad Q = \left[1 - \frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] \left[1 - \frac{e'}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right],$$

$$2\Omega = me \left(x - \frac{1}{x} \right) + m'e' \left(y - \frac{1}{y} \right).$$

Ces coefficients A et B sont des fonctions des éléments, par exemple des grands axes, des excentricités et des inclinaisons et l'on peut se proposer l'étude analytique de ces fonctions. Je me propose de montrer :

1° Que ces fonctions satisfont à des équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

2° Qu'il y a entre ces fonctions, ou du moins entre les B, des relations de récurrence linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

290. A cet effet, je vais envisager une expression plus générale définie comme les A et les B par une intégrale double.

Soit

$$(3) \quad \Pi = \int \int \frac{HE\Omega}{xyF^s} dx dy$$

une intégrale double prise le long de contours fermés.

H, Ω et F sont des polynômes entiers en x , $\frac{1}{x}$, y , $\frac{1}{y}$ dont le degré est respectivement k , ω et f . Quant à s , c'est la moitié d'un entier impair.

Avant d'aller plus loin, il faut que j'explique ce que j'entends par le degré d'un polynôme en x , $\frac{1}{x}$, y , $\frac{1}{y}$. Un pareil polynôme est de la forme

$$\sum A x^a y^b,$$

a et b étant des entiers positifs ou négatifs. Je dirai qu'il est de degré m si

$$|a| \leq m, \quad |b| \leq m.$$

Un polynôme de degré m contient $(2m+1)^2$ coefficients arbitraires, puisque a de même que b peut prendre $2m+1$ valeurs.

Ceci posé, je suppose que Ω et F soient des polynômes donnés, mais que nous fassions varier H. Il y a $(2h+1)^2$ polynômes H de degré h linéairement indépendants, mais pour quelques-uns d'entre eux la fonction Π est nulle. En effet, si P est un polynôme, l'intégrale

$$\int \int \frac{d}{dx} \frac{PE\Omega}{yF^{s+1}} dx dy$$

sera nulle. En effet, intégrons d'abord par rapport à x , nous trouverons

$$\frac{PE\Omega}{yF^{s+1}}.$$

Comme nous intégrons le long d'un contour fermé, cette quantité reprend la même valeur aux deux limites et l'intégrale est nulle.

On verrait de même que, si Q est un polynôme, l'intégrale

$$\int \int \frac{d}{dy} \frac{QE\Omega}{xF^{s-1}} dx dy$$

est nulle. Il suffirait d'intégrer d'abord par rapport à y . Donc

Il sera nul si

$$\frac{HE^{\Omega}}{xyF^s} = \frac{d}{dx} \frac{PE^{\Omega}}{yF^{s-1}} + \frac{d}{dy} \frac{QE^{\Omega}}{xF^{s-1}},$$

c'est-à-dire si

$$(4) \quad \begin{cases} H = x \frac{dP}{dx} F + x \frac{dQ}{dx} PF + (1-s)x \frac{dF}{dx} P \\ \quad + y \frac{dQ}{dy} F + y \frac{dQ}{dy} QF + (1-s)y \frac{dF}{dy} Q. \end{cases}$$

Si P et Q sont de degré ρ , nous voyons que le deuxième membre est de degré $\rho + f + \omega$. Nous devons donc avoir

$$\rho = h - f - \omega.$$

Il y a donc $(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$ polynômes P distincts et autant de polynômes Q. Nous pouvons donc former

$$2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$$

relations de la forme (4). Mais ces relations sont-elles distinctes; ne peut-il pas arriver que le deuxième membre de (4) soit identiquement nul? Cela arrivera si

$$\frac{d}{dx} \frac{PE^{\Omega}}{yF^{s-1}} + \frac{d}{dy} \frac{QE^{\Omega}}{xF^{s-1}} = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\frac{QE^{\Omega}}{F^{s-1}} \frac{dx}{x} - \frac{PE^{\Omega}}{F^{s-1}} \frac{dy}{y}$$

est une différentielle exacte; je représente cette différentielle par

$$d \frac{SE^{\Omega}}{F^{s-2}} = dU,$$

ce qui donne

$$(5) \quad \begin{cases} Q = x \frac{dS}{dx} F + x \frac{dQ}{dx} SF + (2-s)x \frac{dF}{dx} S, \\ -P = y \frac{dS}{dy} F + y \frac{dQ}{dy} SF + (2-s)y \frac{dF}{dy} S. \end{cases}$$

Je dis que S est un polynôme entier (en $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$) et d'abord que c'est une fonction uniforme.

1° L'intégrale $\int dU$ ne présente pas de périodes cycliques. Supposons que l'on calcule cette intégrale en regardant y comme une constante et en faisant décrire à x dans son plan une courbe fermée, à l'intérieur de laquelle il y ait un nombre *pair* de valeurs de x telles que $F = 0$. Il en résultera que quand on aura décrit cette courbe fermée \sqrt{F} et F^{s-1} reviendront à leur valeur initiale. L'intégrale prise le long de ce contour serait une période cyclique de $\int dU$.

Cette période, si elle existe, sera une fonction de y . Je dis que cette fonction devra se réduire à une constante. Si en effet la fonction U admet deux déterminations U' et U'' , on aura

$$\frac{dU'}{dy} = \frac{dU''}{dy} = -\frac{PE\Omega}{yF^{s-1}},$$

et, par conséquent,

$$(6) \quad \frac{d(U' - U'')}{dy} = 0.$$

Si l'on se reporte maintenant à l'analyse de M. Picard dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables (t. I, p. 88 à 90), on verra que cela ne saurait avoir lieu sans que la période cyclique soit nulle si le polynome F est le plus général de son degré et dans beaucoup d'autres cas encore.

2° L'intégrale ne présente pas de période polaire. Elle pourrait en présenter si la fonction sous le signe \int devenait infinie, mais cette fonction ne peut devenir infinie que pour $x = 0$, ou $y = 0$, ou $F = 0$.

Pour $F = 0$, la fonction est infiniment grande d'ordre $s - 1$ à moins que F ne soit divisible par un carré parfait, ce qui n'arrivera pas si F est le polynome le plus général de son degré. La fonction n'étant pas infinie d'ordre entier, il ne peut résulter de là une période polaire.

Soit maintenant $x = 0$. Développons la fonction sous le signe \int suivant les puissances entières positives et négatives de x de telle façon que l'on ait

$$\frac{QE\Omega}{x F^{s-1}} = \sum C_m x^m,$$

les C_m étant des fonctions de y ; alors nous aurons une période polaire qui sera

$$2i\pi C_{-1}.$$

En vertu de l'équation (6), cette période devra être une constante indépendante de y . *Je dis que cette constante est nulle.*

Soit $y = y_0$ une des racines simples de l'équation

$$F(0, y) = 0.$$

Bien entendu, avant de faire $x = 0$, il faut multiplier F par une puissance convenable de x de façon que F reste fini pour $x = 0$.

Faisons varier y de façon que cette variable revienne à sa valeur initiale après avoir tourné autour de y_0 ; alors \sqrt{F} se changera en $-\sqrt{F}$, $\frac{dU}{dx}$ en $-\frac{dU}{dx}$, et, par conséquent, C_{-1} en $-C_{-1}$; mais, comme C_{-1} est une constante, on a

$$C_{-1} = -C_{-1},$$

d'où

$$C_{-1} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il n'y a donc pas de période polaire pour $x = 0$ et l'on verrait de même qu'il n'y en a pas pour $y = 0$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait pas toutefois si F se réduisait à un carré parfait pour $x = 0$.

3° Mais S pourrait encore ne pas être uniforme pour une autre cause. Supposons que l'on prenne l'intégrale U le long d'un contour enveloppant un nombre *impair* de valeurs de x qui annulent F . Alors \sqrt{F} se change en $-\sqrt{F}$ quand on parcourt ce contour.

Donc U se change en $U' = h - U$, h étant une constante qui ne peut dépendre de y . Ici l'équation (6) ne s'applique pas et la différence $U - U'$ n'est pas indépendante de y ; car, \sqrt{F} ayant changé de signe, $\frac{dU}{dy}$ et $\frac{dU'}{dy}$ ne sont pas égaux, mais égaux et de signe contraire, de sorte que

$$\frac{dU'}{dy} = -\frac{dU}{dy}, \quad \frac{dh}{dy} = 0.$$

Ainsi h est une constante absolue. De plus, si nous considérons un autre contour analogue qui change U en $U'' = h' - U$, je dis

que les deux constantes h et h' sont identiques; sans quoi l'intégral admettrait la période $h' - h$.

La constante h étant la même pour tous les contours, nous pouvons choisir la constante arbitraire d'intégration de façon que $h = 0$. Alors notre intégrale ne sera susceptible que de deux valeurs U et $-U$. D'ailleurs le signe de U changera en même temps que celui de \sqrt{F} , de telle sorte que $\frac{U}{\sqrt{F}}$ et par conséquent S est une fonction uniforme.

4^o S est un polynôme entier en

$$x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}.$$

En effet, l'intégrale et S ne peuvent devenir infinis que si les dérivées

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}$$

deviennent infinies, c'est-à-dire si

$$x = \infty, \quad y = \infty, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad F = 0.$$

Pour $F = 0$, les dérivées deviennent infinies d'ordre $s - 1$ et par conséquent U devient infini d'ordre $s - 2$ et S reste fini.

Voyons comment se comporte S pour x très grand. Les termes prépondérants de F , Q , Ω se réduisent respectivement à x^b , x^p et x^ω multipliés par une fonction de y (f , p et ω étant les degrés de F , Q , Ω). Donc $\frac{dU}{dx}$ réduit à ses termes prépondérants se réduira :

$$\varphi(y) x^{f(1-s)+p-1} E^{\psi(y), x^\omega}$$

et U à

$$\theta(y) x^{f(1-s)+p-\omega} E^{\psi(y), x^\omega}$$

et enfin S à

$$\eta(y) x^{p-f-\omega},$$

$\theta(y)$ et $\eta(y)$ étant des fonctions de y faciles à former.

On trouverait le même résultat en cherchant comment S se comporte pour $x = 0$; il suffirait de changer f , p et ω en $-f$, $-p$ et $-\omega$. On raisonnerait encore de même pour y très grand ou très petit.

Donc S se comporte comme un polynôme de degré

$$p - f - \omega = h - 2f - 2\omega.$$

C'est donc un polynôme de degré $h - 2f - 2\omega$, dépendant de

$$(2h - 4f - 4\omega - 1)^2$$

coefficients arbitraires.

Donc parmi les

$$2(2h - 2f - 2\omega - 1)^2$$

relations (4) il y en a seulement

$$2(2h - 2f - 2\omega - 1)^2 - (2h - 4f - 4\omega + 1)^2,$$

qui sont distinctes. Donc nous n'avons que

$$(2h + 1)^2 + (2h - 4f - 4\omega + 1)^2 - 2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$$

expressions Π qui soient linéairement indépendantes. Or ce nombre est égal à

$$8(f + \omega)^2.$$

Il est donc indépendant de h et s . Donc, quelque grand que soit le degré de h du polynôme H , nous n'aurons toujours, au plus, que $8(f + \omega)^2$ expressions Π distinctes.

Remarquons que les expressions où $s = s_0$ rentrent comme cas particuliers dans celles où $s = s_0 + 1$, puisque nous pouvons changer s en $s + 1$ et H en HF sans changer l'expression Π . Donc toutes les expressions Π , quel que soit le nombre s , le degré du polynôme H et ce polynôme lui-même, peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $8(f + \omega)^2$ d'entre elles.

Si nous prenons

$$8(f + \omega)^2 + 1$$

expressions Π quelconques, il y aura entre elles une relation linéaire, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des coefficients des polynômes F , Ω qui sont les mêmes pour toutes ces expressions Π ainsi que des divers polynômes H qui ne sont pas les mêmes pour les différentes expressions Π . Cela résulte de la façon dont nos relations (4) ont été formées.

291. Le nombre des expressions Π distinctes peut s'abaisser si les polynômes présentent certaines espèces de symétrie. Supposons par exemple que F , Ω et H ne changent pas quand on change x

en $-x$ et y en $-y$. Si alors nous écrivons ces polynômes sous la forme

$$\sum A x^a y^b,$$

nous voyons que les deux entiers a et b doivent être de même parité.

Un polynôme de degré m présentant cette symétrie ne contient plus que

$$2m^2 + 2m + 1$$

coefficients arbitraires. Nous n'aurons donc que

$$2h^2 + 2h + 1$$

polynômes H .

Si les polynômes P et Q présentent cette même symétrie il en sera de même du second membre de (4). D'ailleurs nous obtiendrons de cette façon tous les polynômes H symétriques qui sont de la forme (4). Soit en effet

$$\Phi(P, Q)$$

le second membre de (4). Considérons deux polynômes P et Q non symétriques de telle façon que $P(x, y)$ ne soit pas égal à

$$P(-x, -y)$$

et supposons que

$$\Phi[P(x, y), Q(x, y)]$$

soit égal à un polynôme symétrique H de telle sorte que

$$H(x, y) = H(-x, -y);$$

nous aurons à la fois

$$H(x, y) = \Phi[P(x, y), Q(x, y)]$$

et

$$H(x, y) = H(-x, -y) = \Phi[P(-x, -y), Q(-x, -y)],$$

ou, en additionnant et divisant par 2,

$$H(x, y) = \Phi \left[\frac{P(x, y) + P(-x, -y)}{2}, \frac{Q(x, y) + Q(-x, -y)}{2} \right],$$

qui est une relation de la forme (4) où les polynômes P et Q sont

remplacés par les polynômes symétriques

$$\frac{P(x, y) + P(-x, -y)}{2}, \quad \frac{Q(x, y) + Q(-x, -y)}{2}.$$

Il suffira donc de considérer les relations (4) formées avec des polynômes symétriques. Nous aurons donc, non plus

$$2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$$

relations (4), mais

$$2[2(h - f - \omega)^2 + 2(h - f - \omega) + 1].$$

De même, si nous nous reportons aux relations (5), nous verrons que, si P et Q sont symétriques, il en sera de même de S; nous aurons donc

$$2(h - 2f - 2\omega)^2 + 2(h - 2f - 2\omega) + 1$$

polynômes S.

En résumé le nombre des expressions Π distinctes ne sera plus

$$(2h + 1)^2 + (2h - 2f - 2\omega + 1)^2 - 2(2h - f - \omega + 1)^2 = 8(f + \omega)^2,$$

mais seulement

$$\theta(h) + \theta(h - 2f - 2\omega) - 2\theta(h - f - \omega),$$

en posant

$$\theta(h) = 2h^2 + 2h + 1.$$

Ce nombre sera donc

$$4(f + \omega)^2.$$

292. Appliquons ce qui précède aux expressions (1) et (2), mais auparavant il est préférable de les transformer en posant

$$x = \xi \eta, \quad y = \frac{\xi}{\eta}.$$

Alors, Δ^2 , qui était un polynôme contenant des termes en

$1, x^2, x^{-2}, y^2, y^{-2}, xy, xy^{-1}, x^{-1}y, x^{-1}y^{-1}, x, y, x^{-1}, y^{-1}$, deviendra un polynôme entier du second ordre en

$$\xi, \frac{1}{\xi}, \eta, \frac{1}{\eta}.$$

Ce polynôme ne change pas quand on change ξ et η en $-\xi$ et $-\eta$. Ce sera lui qui jouera le rôle de F ; nous avons donc

$$f = 2.$$

Le polynôme Ω devient de son côté un polynôme symétrique du premier degré en

$$\xi, \frac{1}{\xi}, \quad \eta, \frac{1}{\eta},$$

de sorte que

$$\omega = 1.$$

Dans la formule (1), bien entendu, où l'exponentielle E^Ω ne figure pas, on prendra $\omega = 0$.

Le rôle du polynôme H sera joué dans l'expression (1) par $\frac{1}{x^m y^{m'}}$, et dans l'expression (2) par $\frac{Q}{x^m y^{m'}}$, qui nous donneront l'une et l'autre un polynôme symétrique en

$$\xi, \frac{1}{\xi}, \quad \eta, \frac{1}{\eta}.$$

Nos coefficients $B_{mm'}$ et $A_{mm'}$ seront représentés à un facteur numérique près par l'intégrale

$$\int \int H E^\Omega \frac{d\xi d\eta}{\xi \eta \Delta},$$

où Ω est du degré 0 ou 1 et où

$$H = \frac{1}{x^m y^{m'}} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{x^m y^{m'}};$$

où enfin Δ joue le rôle de $F^{\frac{1}{2}}$. Ce sont donc des expressions de la forme II.

Les coefficients de ces polynômes F , Ω et H sont d'ailleurs des fonctions rationnelles des grands axes a et a' , des excentricités e , e' et de $\sqrt{1-e^2}$, $\sqrt{1-e'^2}$, ou, si l'on aime mieux, de ε et de ε' , en posant

$$e = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad e' = \frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}.$$

Ce sont également des fonctions rationnelles des lignes trigono-

métriques dépendant de l'inclinaison et des périhélies, c'est-à-dire de $\tan \frac{J}{2}$, $\tan \frac{\varpi}{2}$, $\tan \frac{\varpi'}{2}$.

Ce sont en résumé des fonctions rationnelles des sept quantités

$$\alpha, \alpha', \varepsilon, \varepsilon', \tan \frac{J}{2}, \tan \frac{\varpi}{2}, \tan \frac{\varpi'}{2},$$

les longitudes des périhélies étant comptées dans les plans des deux orbites, à partir de l'intersection mutuelle de ces plans. Ce sont ces sept quantités que nous appellerons les *éléments*.

Envisageons maintenant la dérivée de $A_{mm'}$, ou de $B_{mm'}$ par rapport à l'un de ces éléments, que je désigne par α ; elle sera égale à

$$\int \int H' E \Omega \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\eta}{\eta \Delta^3}$$

où

$$H' = \Delta^2 \left(\frac{dH}{d\alpha} + H \frac{d\Omega}{d\alpha} \right) - \frac{1}{2} H \frac{d\Delta^2}{d\alpha}$$

sera un polynôme de même forme que H . Nous retrouvons donc une expression de la forme Π avec cette différence que l'exposant s qui était égal à $\frac{1}{2}$ est maintenant $\frac{3}{2}$.

Si nous considérons une dérivée partielle seconde, cet exposant deviendra $\frac{5}{2}$, rien d'ailleurs ne sera changé, et il en serait de même pour les dérivées d'ordre supérieur.

Ainsi nos coefficients $A_{mm'}$, $B_{mm'}$ ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport aux éléments sont des expressions de la forme Π .

Les conclusions du n° 290 sont vraies quand le polynôme F est le plus général de son degré. Elles subsisteraient bien entendu dans les cas particuliers, par passage à la limite; mais ici elles sont directement applicables.

En effet le théorème de M. Picard s'applique directement toutes les fois que le polynôme F est indécomposable.

C'est ce qui arrive pour le polynôme Δ^2 dans le cas général du problème des trois corps. Quand l'inclinaison est nulle, le polynôme

Δ^2 se décompose, mais nous restons dans les cas très étendus où le théorème de M. Picard est applicable.

Il n'y a donc pas de période cyclique.

Pour montrer ensuite qu'il n'y a pas de période polaire, nous avons supposé que $F(x, y)$ ne devenait pas un carré parfait quand après l'avoir multiplié par une puissance convenable de x on y fait $x = 0$.

Si nous appliquons cette règle au polynôme

$$\Delta^2 = F(\xi, \eta),$$

cela reviendra à réduire Δ^2 aux termes en x^2, xy, y^2 , ou en $x^{-2}, x^{-1}y^{-1}, y^{-2}$, ou en x^2, xy^{-1}, y^{-2} , ou encore en $x^{-2}, x^{-1}y, y^2$. Ce polynôme ne se réduit pas ainsi à un carré parfait. La condition est donc remplie.

293. Appliquons d'abord cela à l'expression (1) et aux coefficients B_{mm} ; nous avons

$$f = 2, \quad \omega = 0.$$

Le nombre des expressions distinctes est donc

$$4(f + \omega)^2 = 16.$$

Nous n'avons donc que seize coefficients distincts. Donc :

Si l'on envisage le développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies excentriques, il y aura entre les coefficients des relations linéaires de récurrence dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des éléments. Ces relations permettent d'exprimer tous ces coefficients en fonctions de seize d'entre eux.

Ces relations de récurrence sont assimilables à celles qui relient les coefficients de Laplace. Ces relations peuvent s'obtenir de la façon suivante; écrivons les deux identités

$$x \frac{d\Delta^2}{dx} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + 2x \frac{d}{dx} \Delta^2 = 0,$$

$$y \frac{d\Delta^2}{dy} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + 2y \frac{d}{dy} \Delta^2 = 0.$$

Remplaçons dans ces identités Δ^2 et $\frac{1}{\Delta}$ par leurs développements suivant les puissances entières positives et négatives de x et y , et égalons à zéro dans l'une de ces identités le coefficient de $x^p y^q$.

On a retrouvé dans le *Nachlass* de Jacobi, sans démonstration, un énoncé d'après lequel le nombre des coefficients distincts serait non pas 16, mais 15. Cela est possible, car 16 n'est ici qu'un maximum. Il serait intéressant de pousser la vérification jusqu'au bout.

294. Supposons maintenant que l'on envisage un coefficient et ses dérivées partielles des divers ordres par rapport aux éléments. Ce sont encore des expressions Π , elles sont donc liées à seize d'entre elles par des relations linéaires.

Ainsi chacun de nos coefficients B, considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du seizième ordre au plus, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

Si l'on considère deux ou plusieurs éléments comme des variables indépendantes, on peut former aussi un très grand nombre d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Tous nos coefficients B, et toutes les dérivées partielles peuvent s'exprimer linéairement en fonctions de seize de ces coefficients, ou bien encore en fonction de l'un d'eux et de quinze de ses dérivées partielles.

295. Passons maintenant au cas de l'expression (2) et des coefficients $A_{mm'}$, qui sont ceux du développement suivant les anomalies moyennes. Cette fois

$$f = 2, \quad \omega = 1,$$

$$4(f + \omega)^2 = 36.$$

Seulement le polynome Ω dépend de m et de m' . Il n'est donc pas le même pour deux coefficients $A_{mm'}$ différents.

Les conclusions du n° 293 ne se généralisent donc pas.

Au contraire, le polynome Ω est le même pour un coefficient $A_{mm'}$ et pour toutes ses dérivées partielles, de sorte que le théorème du n° 294 se généralise immédiatement.

Chacun des coefficients A, considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du trente-sixième ordre au plus. Il satisfait en outre à de nombreuses équations linéaires aux dérivées partielles, si l'on regarde les divers éléments comme des variables indépendantes.

296. Passons au cas où les excentricités sont nulles; il en résulte de grandes simplifications. D'abord, en effet, il n'y a pas de distinction à faire entre les anomalies excentriques et moyennes, de sorte que l'on a

$$\Omega = 0, \quad A_{mm'} = B_{mm'}.$$

De plus on a

$$\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha\alpha' \mu \left(z + \frac{1}{z} \right) + \alpha\alpha' \nu \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right),$$

en posant

$$z = \frac{x}{y} = r^2, \quad \omega = xy = \xi^2.$$

D'ailleurs les coefficients $A_{mm'}$ sont exprimés à un coefficient numérique près par l'intégrale

$$\int \int H \frac{dz d\omega}{z \omega \Delta},$$

où H est un polynome entier en z , ω , $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\omega}$.

On a donc

$$f = 1, \quad \omega = 0.$$

Le polynome qui joue le rôle de F est ici Δ^2 , et l'on voit que, pour $z = 0$, l'expression $z\Delta$ se réduit à une constante; le raisonnement par lequel on démontre qu'il ne peut y avoir de périodes polaires n'est donc pas applicable immédiatement [puisque nous avons dû supposer plus haut que le premier membre de l'équation $F(x, y) = 0$ ne se réduisait pas à un carré parfait pour $x = 0$].

Nous pourrions nous tirer d'affaire de plusieurs manières différentes :

1° En nous servant des fonction elliptiques, comme je l'ai fait dans le *Bulletin astronomique*, t. XIV;

2° En revenant aux variables x et y .

Mais je préfère me servir de la symétrie du polynome Δ^2 .

Ce polynôme ne change pas en effet quand on change z en $\frac{1}{z}$, ou bien w en $\frac{1}{w}$. Un polynôme satisfaisant à cette double condition sera ce que j'appellerai désormais *symétrique*.

Dans le développement de $\frac{1}{\Delta}$ les coefficients de

$$z^a w^b, \quad z^{-a} w^b, \quad z^a w^{-b}, \quad z^{-a} w^{-b}$$

sont égaux, et peuvent être représentés à un même coefficient numérique près $-\frac{1}{4\pi^2}$ par l'une des intégrales doubles

$$\int \int z^{-a} w^{-b} \frac{dz dw}{z w \Delta} = \int \int H \frac{dz dw}{z w \Delta},$$

où

$$H = \frac{z^a w^b + z^{-a} w^b + z^a w^{-b} + z^{-a} w^{-b}}{4}.$$

Nous pouvons donc toujours supposer que le polynôme H est symétrique.

Nous devons ensuite rechercher quels sont les polynômes H symétriques qui nous conduisent à une intégrale double identiquement nulle. Ce sont ceux qui sont de la forme (4). Dans le second membre de l'expression (4), il faut, bien entendu, faire $\Omega = 0$ et remplacer x et y par les variables nouvelles z et w .

Je remarque maintenant que si, dans cette expression (4) ainsi modifiée, on remplace $P(z, w)$, $Q(z, w)$ par $-P\left(\frac{1}{z}, w\right)$, $Q\left(\frac{1}{z}, w\right)$, l'expression $H(z, w)$ se change en $H\left(\frac{1}{z}, w\right)$. De même, si l'on remplace $P(z, w)$, $Q(z, w)$ par $P\left(z, \frac{1}{w}\right)$, $-Q\left(z, \frac{1}{w}\right)$, l'expression $H(z, w)$ se change en $H\left(z, \frac{1}{w}\right)$.

Si l'on a alors

$$P(z, w) = -P\left(\frac{1}{z}, w\right) = P\left(z, \frac{1}{w}\right) = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

$$Q(z, w) = Q\left(\frac{1}{z}, w\right) = -Q\left(z, \frac{1}{w}\right) = -Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

nous dirons que P et Q présentent la *symétrie croisée*.

Il est clair que, si P et Q présentent la symétrie croisée, l'expression H présentera la symétrie directe.

Si H présente la symétrie directe, je dis que l'on pourra toujours, sans restreindre la généralité, supposer que P et Q ont la symétrie croisée. En effet, si H est symétrique, on pourra, sans changer H, remplacer P et Q par

$$-P\left(\frac{1}{z}, w\right), \quad Q\left(\frac{1}{z}, w\right),$$

ou par

$$P\left(z, \frac{1}{w}\right), \quad -Q\left(z, \frac{1}{w}\right),$$

ou par

$$-P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right), \quad -Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

ou enfin par les deux polynômes

$$\frac{P(z, w) - P\left(\frac{1}{z}, w\right) + P\left(z, \frac{1}{w}\right) - P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)}{4},$$

$$\frac{Q(z, w) + Q\left(\frac{1}{z}, w\right) - Q\left(z, \frac{1}{w}\right) - Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)}{4},$$

qui présentent la symétrie croisée.

Si maintenant P et Q présentent la symétrie croisée, l'expression

$$\int \left(\frac{Q}{F^{s-1}} \frac{dz}{z} - \frac{P}{F^{s-1}} \frac{dw}{w} \right) = \int dU = \int d \frac{S}{F^{s-2}},$$

supposée intégrable, présentera une troisième espèce de symétrie que j'appellerai la *symétrie inverse*, c'est-à-dire que S et U changeront de signe quand on changera z en $\frac{1}{z}$, ou bien w en $\frac{1}{w}$.

Dans ces conditions,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{Q}{F^{s-1}z}$$

change de signe quand on change w en $\frac{1}{w}$. Si nous posons

$$\frac{dU}{dz} = \sum C_m z^m,$$

notre période polaire, si elle existe, sera $2i\pi C_{-1}$; elle sera indépendante de w (qui joue ici le rôle de y). D'autre part, elle devra

changer de signe quand on changera ϖ en $\frac{1}{\varpi}$; elle est donc nulle.

C. Q. F. D.

Examinons maintenant le degré de ces différents polynômes; mais nous ne définirons pas le degré de la même manière que dans les numéros précédents.

Soit un polynome en $z, \frac{1}{z}, \varpi, \frac{1}{\varpi}$,

$$\sum A z^a \varpi^b.$$

Nous dirons qu'il est de degré m si

$$|a| + |b| \leq m.$$

Soit alors h le degré de H , nous voyons que celui de P et de Q est $h - 1$ et que celui de S est $h - 2$.

Un polynome de degré h contient $2h^2 + 2h + 1$ coefficients arbitraires, mais, s'il est symétrique, il n'en contient plus que $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ si la symétrie est directe et, en effet, les coefficients de $z^{\pm a} \varpi^{\pm b}$ se déduisent d'un seul d'entre eux, de sorte que nous n'avons plus à envisager que les termes où les deux exposants sont nuls ou positifs. Si la symétrie est croisée, il arrive (pour P par exemple) que les termes indépendants de z sont nuls, de sorte que nous ne devons plus envisager que les termes où l'un des exposants est nul, et l'autre nul ou positif. Cela fait $\frac{h(h+1)}{2}$ coefficients distincts. Si enfin la symétrie est inverse, les termes indépendants soit de ϖ , soit de z , sont nuls, et les deux exposants doivent être positifs, de sorte qu'il reste $\frac{h(h-1)}{2}$ coefficients. Nous sommes donc conduits au Tableau suivant :

Polynome.	Degré.	Symétrie.	Nombre des coefficients.
H	h	directe	$\frac{(h+1)(h+2)}{2}$
P	$h-1$	croisée	$\frac{h(h-1)}{2}$
Q	$h-1$	croisée	$\frac{h(h-1)}{2}$
S	$h-2$	inverse	$\frac{(h-2)(h-3)}{2}$

Le nombre des expressions Π distinctes est donc

$$\frac{(h+1)(h+2)}{2} + \frac{(h-2)(h-3)}{2} - h(h-1) = 4.$$

Donc, entre les coefficients du développement de la fonction perturbatrice, il y a des relations linéaires de récurrence dont les coefficients sont rationnels par rapport aux éléments et qui permettent d'exprimer tous ces coefficients à l'aide de quatre d'entre eux. Chacun d'eux, considéré comme fonction de l'un des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Considéré comme fonction de tous les éléments, il satisfait à un grand nombre d'équations aux dérivées partielles. Tous les coefficients et toutes leurs dérivées partielles peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de quatre des coefficients, ou bien encore à l'aide de l'un d'eux et de trois de ses dérivées partielles.

297. On arriverait au même résultat en conservant les variables x et y ; on aurait alors

$$\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha\alpha'\mu\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \alpha\alpha'\nu\left(xy + \frac{1}{xy}\right).$$

Ce polynome serait de degré 1 au sens du n° 290 et non plus du n° 296. Il serait d'ailleurs symétrique au sens du n° 291 et non plus du n° 296. Enfin l'expression $x\Delta^2$ se réduirait, pour $x=0$, à

$$\alpha\alpha'\left(\mu y + \frac{\nu}{y}\right),$$

qui n'est pas un carré parfait; nous pourrions donc appliquer les conclusions du n° 291, et, puisque

$$f=1, \quad \omega=0,$$

le nombre des expressions Π distinctes serait

$$4(f+\omega)^2 = 4. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

298. Les équations aux dérivées partielles auxquelles conduit l'analyse précédente ont déjà été rencontrées. Ce sont celles que

nous avons étudiées au n° 261. Nous avons vu que les onze dérivées partielles de Z , désignées dans ce numéro par (8), (9), (10), (11), (12), (13), s'expriment linéairement en fonctions des neuf expressions (14) qui sont elles-mêmes liées par les trois relations (15). Il y a donc, entre ces onze dérivées, cinq relations. Soit

$$Z = \sum U z^h w^k.$$

Les coefficients de $z^h w^k$ dans les onze dérivées partielles seront

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{d\mu}, \quad \frac{dU}{d\nu}, \quad -h^2 U, \quad -k^2 U, \quad \frac{d^2 U}{d\mu^2}, \quad \frac{d^2 U}{d\mu d\nu}, \quad \frac{d^2 U}{d\nu^2}, \\ \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad \frac{d^2 U}{dx d\mu}, \quad \frac{d^2 U}{dx d\nu}.$$

Il y aura donc cinq relations entre U et ses neuf dérivées des deux premiers ordres. D'ailleurs, outre les relations (15), les neuf expressions (14) sont liées entre elles et à $Z = \sum U z^h w^k$ par la relation

$$(1 + x^2)Z' - 2x\mu Z' \cos \xi - 2x\nu Z' \cos \eta = -sZ.$$

Nous aurons donc six relations entre U et ses neuf dérivées, c'est-à-dire que U satisfait à six équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. De U et de ses dérivées, en tout dix expressions, il en reste donc quatre qui sont indépendantes.

Parmi ces six équations, nous distinguerons celles qui ont été étudiées à la fin du n° 261 et dont nous avons vu la parenté avec les équations de M. Appell. Nous avons vu que ces équations admettent quatre solutions distinctes, de sorte que U considéré comme fonction d'un seul élément satisfait à une équation différentielle du quatrième ordre.

299. Les fonctions que nous avons étudiées dans ce Chapitre sont définies par des intégrales doubles et ces intégrales doubles sont prises le long des contours fermés. En d'autres termes, ce sont des *périodes* de l'intégrale double indéfinie

$$\int \int_{\text{HE}\Omega} \frac{dx dy}{xy F^s}.$$

Supposons que nous fassions varier l'un des éléments, que j'appellerai z , en lui donnant bien entendu des valeurs imaginaires, et que cet élément z décrive dans son plan un contour fermé. Notre coefficient, représenté par notre intégrale double, est une fonction analytique de l'élément z ; quand cet élément aura décrit son contour fermé, nous retomberons sur une autre détermination de cette fonction analytique, et cette détermination ne pourra être qu'une autre période de notre intégrale définie double.

Supposons que cette intégrale définie ait k périodes fondamentales

$$P_1, P_2, \dots, P_k;$$

toutes les autres périodes et, par conséquent, toutes les déterminations de notre fonction, seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de ces périodes fondamentales.

Quand donc la variable décrira un contour fermé, les différentes déterminations de la fonction subiront une transformation linéaire à coefficients entiers. Considérons maintenant plusieurs fonctions Π qui pourront différer par les polynômes H et Ω , mais pas par le polynôme F , toutes ces fonctions subiront *la même* transformation linéaire, puisque celle-ci ne dépend que de la déformation des contours d'intégration.

Soit donc Δ le déterminant formé par k déterminations correspondantes de k fonctions Π ; ce déterminant sera multiplié simplement par un facteur numérique quand la variable décrira un contour fermé; le rapport de deux de ces déterminants demeurera donc constant, ce sera donc une fonction uniforme.

Donc entre $k + 1$ fonctions Π , il y aura une relation linéaire dont les coefficients seront des fonctions uniformes des éléments. *Donc le nombre des périodes fondamentales est égal à celui des fonctions Π en fonction desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer par des relations linéaires dont les coefficients sont des fonctions uniformes des éléments.*

Si les fonctions Π ne présentent que des singularités algébriques, ces fonctions uniformes se comporteront comme des fonctions rationnelles. Les coefficients de nos relations seront des fonctions non seulement uniformes, mais rationnelles. C'est ce qui arrive quand $\Omega = 0$.

Nous pouvons prévoir par là que le nombre des périodes fonda-

mentales est de 16 dans le cas général et de 4 si les excentricités sont nulles. C'est ce que montre le résultat obtenu au sujet du développement suivant les anomalies excentriques.

Mais alors nous pouvons en tirer une conclusion relative au développement suivant les anomalies moyennes. Il y aura entre les coefficients de ce développement des relations linéaires de récurrence dont les coefficients seront des fonctions non rationnelles mais uniformes des éléments, et ces relations permettront de les exprimer tous à l'aide de seize d'entre eux. De plus chacun de ces coefficients satisfera à une équation différentielle linéaire, qui sera du seizième ordre (et non plus du trente-sixième), mais dont les coefficients seront non plus rationnels, mais uniformes.

Ces relations de récurrence et ces équations différentielles sont analogues à celles que nous avons rencontrées dans l'étude des coefficients de Laplace. Nul doute qu'elles ne puissent rendre les mêmes services dans le cas où les excentricités sont nulles; mais il n'en est pas de même dans le cas général; leur ordre semble trop élevé; heureusement il est permis d'espérer que ces équations ne sont pas irréductibles et que l'étude des périodes de l'intégrale double permettra d'en abaisser l'ordre.

J'ajouterai que M. Féraud, dans le Tome VIII des *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*, a montré que, par suite de certaines symétries, cet ordre pouvait s'abaisser de lui-même dans certains cas particuliers.



CHAPITRE XXII.

CALCUL NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS.

300. Dans les Chapitres précédents, nous avons cherché à obtenir le développement *analytique* des coefficients à l'aide de séries procédant suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. L'emploi de ces développements ne présenterait aucune difficulté si le nombre des termes n'était pas si grand. Mais ce nombre a effrayé beaucoup d'astronomes qui se sont efforcés de calculer la valeur numérique des coefficients sans passer par l'intermédiaire de ces développements.

Nous avons vu que les coefficients pouvaient se mettre sous la forme d'intégrales définies. Telles sont les intégrales (1) et (2) des n^{os} 280 et 289

$$(1) \quad -4\pi^2 B_{mm'} = \iint \frac{dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

$$(2) \quad -4\pi^2 A_{mm'} = \iint \frac{QE^\Omega dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}.$$

On pourrait donc calculer les valeurs de ces intégrales doubles par quadratures mécaniques; nous pouvons écrire en effet l'équation (2) sous la forme

$$(3) \quad 4\pi^2 A_{mm'} = \iint \frac{QE^\Omega}{\Delta} E^{-i(mu+m'u')} du du',$$

ou bien encore sous la forme

$$(4) \quad 4\pi^2 A_{mm'} = \iint \frac{1}{\Delta} E^{-i(mt+m't')} dl dl',$$

d'où l'on tirerait les formules approchées

$$(3 \text{ bis}) \quad n^2 A_{mm'} = \sum \frac{QE^\Omega}{\Delta} E^{-i(mu+m'u')}$$

et

$$(4\ bis) \quad n^2 A_{mm'} = \sum \frac{1}{\lambda} E^{-i, ml+m'l'}.$$

Dans la formule (3 *bis*), il faut donner, sous le signe \sum , à u de même qu'à u' , les n valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Cela fera donc, sous le signe \sum , des termes dont le nombre sera n^2 , puisqu'il faut combiner les n valeurs de u avec les n valeurs de u' .

Pour la formule (4 *bis*), on opérera de la même manière avec cette différence que ce n'est plus à u et à u' , mais bien à l et à l' qu'il faut donner les n valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Le Verrier voulant calculer la grande inégalité Pallas-Jupiter, c'est-à-dire le coefficient A_{18-7} , a employé la formule (4 *bis*). Il aurait pu se servir avec plus d'avantage de la formule (3 *bis*). Mais il fallait la puissance de calcul de Le Verrier pour avoir le courage d'aborder une tâche aussi écrasante. Heureusement il y a des moyens d'éviter ces quadratures mécaniques, ou tout au moins de réserver les quadratures mécaniques pour le calcul, non plus d'une intégrale double, mais d'une intégrale simple. Les plus importantes de ces méthodes sont celles de Hansen, de Cauchy et de Jacobi.

301. Méthode de Hansen. — Il s'agit d'obtenir les coefficients $B_{mm'}$ du développement procédant suivant les anomalies excenriques. Il sera aisé ensuite de passer aux coefficients $A_{mm'}$ du développement suivant les anomalies moyennes en employant la formule du n° 240, ou bien encore de passer au développement spécial de Hansen en employant la formule du n° 246.

Prenons alors l'expression de Δ^2 ; c'est un polynome du second degré en $E^{\pm iu}$, $E^{\pm iu'}$, de sorte que nous pouvons écrire

$$(5) \quad \Delta^2 = A + BE^{iu} + B'E^{-iu} + CE^{2iu} + C'E^{-2iu},$$

les coefficients A, B et C dépendant seulement de u ; nous verrons ensuite que l'on a simplement

$$C = C' = \frac{\alpha'^2 e'^2}{4},$$

de sorte que C et C' sont indépendants de u et, de plus, du second degré par rapport aux excentricités. Nous pouvons en conséquence négliger ces termes en première approximation et, appelant Δ_0^2 la somme des trois premiers termes du second membre de (5) et R la somme des deux derniers, écrire

$$(6) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2} \frac{R}{\Delta_0^3} + \frac{3}{8} \frac{R^2}{\Delta_0^5} - \dots$$

La série (6) converge très rapidement à cause de la petitesse de R, de sorte que le développement de $\frac{1}{\Delta}$ est ramené à celui de $\frac{1}{\Delta_0}$, $\frac{1}{\Delta_0^3}$, ...

Or nous pouvons poser

$$\Delta_0^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} = H^2[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(u' - \beta)],$$

H, α et β étant des fonctions de u . On en déduit

$$(7) \quad \frac{1}{\Delta_0^{2s}} = \frac{1}{H^{2s}} \sum b_s^{(k)} E^{ik(u' - \beta)},$$

les $b_s^{(k)}$ étant les coefficients de Laplace formés en fonctions de α par les procédés du Chapitre XVII.

A, B, B' peuvent être regardées comme des fonctions connues de u ; il en est donc de même de H, α et β et, par conséquent, des $b_s^{(k)}$; on aura alors

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}} = \sum C_{hk} E^{i(ku' + hu)}$$

si C_{hk} est le coefficient de E^{ihu} dans le développement de

$$\frac{1}{H^{2s}} b_s^{(k)} E^{-ik\beta},$$

c'est-à-dire si

$$(8) \quad 2\pi C_{hk} = \int_0^{2\pi} \frac{du}{H^{2s}} b_s^{(k)} E^{-i(k\beta + hu)}.$$

On calculera l'intégrale (8) par quadratures mécaniques à l'aide de la formule

$$(9) \quad C_{hk} = \sum \frac{b_s^k E^{-i, k} \beta + hu}{H^{2s}},$$

où n est un grand nombre; la fonction qui figure sous le signe \sum est une fonction de u ; on y donnera successivement à u les n valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Telle est la méthode de Hansen; je me bornerai à renvoyer pour plus de détails au Chapitre XXI du Tome IV de la *Mécanique céleste* de Tisserand et en particulier aux pages 341 à 344.

302. Méthode de Jacobi. — Jacobi cherche aussi à former le développement qui procède suivant les anomalies excentriques; il décompose aussi Δ^2 en deux parties Δ_0^2 et R , dont la seconde est du second degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons; mais il n'a pas recours aux quadratures mécaniques. Sa manière de mettre Δ^2 sous la forme

$$\Delta_0^2 + R$$

n'est d'ailleurs pas la même que celle de Hansen. Pour bien la faire comprendre, je suppose d'abord que l'inclinaison soit nulle. On trouve alors, en appelant ξ , η et ξ' , η' les coordonnées des deux planètes,

$$\Delta^2 = (\xi + i\eta - \xi' - i\eta')(\xi - i\eta - \xi' + i\eta').$$

D'autre part, si l'on pose

$$e = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad e' = \frac{2\varepsilon'}{1 + \varepsilon'^2},$$

il vient

$$\xi + i\eta = \frac{\alpha E^{i\varpi}}{1 + \varepsilon^2} (E^{iu} - 2\varepsilon + \varepsilon^2 E^{-iu}).$$

On en déduirait l'expression de $\xi - i\eta$ en changeant i et $-i$, et l'on aurait ensuite celles de $\xi' + i\eta'$, $\xi' - i\eta'$ en changeant α , ε , ϖ , u en α' , ε' , ϖ' , u' .

Si, dans l'expression précédente, nous négligeons le terme en $\varepsilon^2 E^{-iu}$, nous commettrons une erreur du second degré et nous trouverons

$$\Delta_0^2 = (2b'\varepsilon' - 2b\varepsilon + bE^{iu} - b'E^{iu'}) (2b_1'\varepsilon' - 2b_1\varepsilon + b_1E^{-iu} - b_1'E^{-iu'})$$

en posant, pour abrégér,

$$b = \frac{\alpha E^{i\varpi}}{1 + \varepsilon^2}, \quad b' = \frac{\alpha' E^{i\varpi'}}{1 + \varepsilon'^2}, \quad b_1 = \frac{\alpha E^{-i\varpi}}{1 + \varepsilon^2}, \quad b_1' = \frac{\alpha' E^{-i\varpi'}}{1 + \varepsilon'^2}.$$

Si alors nous désignons par Δ_0^2 cette valeur approchée de Δ^2 et par R l'erreur commise, nous aurons

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + R,$$

et R sera du second degré par rapport aux excentricités.

Si l'inclinaison n'est pas nulle, nous pourrions développer suivant les puissances de l'inclinaison et dans le développement ne figureront que des puissances *paires* de l'inclinaison.

Si donc nous négligeons l'inclinaison, l'erreur commise sera du second degré. Nous pourrions donc conserver la même expression pour Δ_0^2 et l'erreur $R = \Delta^2 - \Delta_0^2$ sera encore du second degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Nous pouvons écrire ensuite

$$\Delta_0^2 = H^2 (1 - \gamma E^{i(u-u'-\omega)} - \gamma' E^{-i(u'-\omega')}) (1 - \gamma E^{-i(u-u'-\omega)} - \gamma' E^{i(u'-\omega')}),$$

en posant

$$H = \frac{\alpha'}{1 + \varepsilon'^2}, \quad \gamma E^{-i\omega} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{1 + \varepsilon'^2}{1 + \varepsilon^2} E^{i(\varpi - \varpi')} = \frac{b}{b'},$$

$$\gamma' E^{i\omega'} = 2\varepsilon' - 2\varepsilon \frac{b}{b'}.$$

Il est clair d'ailleurs que nous pourrions modifier les coefficients H, γ , ω , γ' , ω' , qui figurent dans Δ_0^2 , pourvu que les modifications soient seulement du second degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. L'erreur R resterait du second degré.

Jacobi profite de cette latitude pour faire disparaître certains termes de R, à savoir les termes tout connus, les termes en

$$\frac{\cos}{\sin} (u - u'), \quad \frac{\cos}{\sin} u.$$

Je renverrai pour les détails de l'analyse à la *Mécanique céleste* de Tisserand (t. IV, Chap. XVIII, p. 301 à 306).

Quoi qu'il en soit, nous avons

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2} \frac{R}{\Delta_0^2} + \frac{3}{8} \frac{R^2}{\Delta_0^3} - \dots,$$

de sorte que (R se réduisant à un nombre fini de termes) le développement de $\frac{1}{\Delta}$ est ramené à celui de $\frac{1}{\Delta_0^s}$. Si nous posons, pour abréger,

$$E(u-u') = \alpha, \quad E^{-1}(u-u') = \omega,$$

il vient

$$\frac{1}{\Delta_0^s} = H^{-2s} (1 - \gamma \alpha - \gamma' \omega)^{-s} (1 - \gamma \alpha^{-1} - \gamma' \omega^{-1})^{-s},$$

et il s'agit d'effectuer le développement suivant les puissances entières, positives ou négatives de α et de ω .

Il est aisé de vérifier que le coefficient de $\alpha^h \omega^k$ sera, au facteur près $\gamma^h \gamma'^k$ et à un facteur constant près, une série hypergéométrique de deux variables de M. Appell par rapport à γ^2 et γ'^2 .

Ces séries sont tout à fait analogues à celles que nous avons étudiées au Chapitre XVIII, seulement elles ne se réduisent pas à des polynomes.

Jacobi ne se sert pas de ces séries, qui n'étaient pas encore connues de son temps: son analyse est un peu différente; on la trouvera dans la *Mécanique céleste* de Tisserand (t. IV, p. 306 à 311).

Les coefficients du développement de $\frac{1}{\Delta_0}, \frac{1}{\Delta_0^2}, \frac{1}{\Delta_0^3}, \dots$ sont liés par des relations de récurrence, et ces relations permettent de les exprimer tous à l'aide de quatre d'entre eux (de sorte qu'elles deviennent pratiquement utilisables). Il suffit, pour s'en convaincre, soit de se reporter à ce que nous avons dit au n° 264, soit d'appliquer les principes du Chapitre XXI, en remarquant qu'ici $\omega = 0$, $f = 1$ et que le polynome Δ_0^2 présente une symétrie particulière, puisqu'il ne change pas quand on change α en $\frac{1}{\alpha}$ et ω en $\frac{1}{\omega}$.

303. Méthode de Cauchy. — Cauchy, comme Jacobi et Hansen,

cherche d'abord le développement suivant les anomalies excentriques pour en déduire, par le moyen des fonctions de Bessel, le développement suivant les anomalies moyennes. Je n'ai pas à revenir sur le passage d'un développement à l'autre; je m'occuperai donc simplement de la manière d'obtenir le développement suivant les anomalies excentriques.

La méthode de Cauchy se rapproche également de celle de Hansen par un autre point. Cauchy commence par développer $\frac{1}{\Delta}$ suivant les anomalies excentriques de la seconde planète sous la forme

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{n'} E^{in'u'}.$$

Les $B_{n'}$ sont des fonctions de u et, si nous posons

$$B_{n'} = \sum B_{nn'} E^{inu},$$

il vient finalement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{nn'} E^{i(nu+n'u')}.$$

Cauchy calcule les coefficients $B_{n'}$ par des *procédés analytiques* et il en déduit ensuite les coefficients $B_{nn'}$ par *quadrature mécanique* à l'aide de l'intégrale

$$(10) \quad 2\pi B_{nn'} = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inu} du.$$

La différence provient surtout de la manière d'obtenir les coefficients $B_{n'}$; reprenons la formule (5) :

$$(5) \quad \Delta^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} + CE^{2iu'} + C'E^{-2iu'}.$$

Si nous égalons Δ^2 à 0, nous obtiendrons une équation du quatrième degré en $y = E^{iu'}$ qui peut s'écrire

$$(11) \quad A + By + \frac{B'}{y} + Cy^2 + C'y^{-2} = 0.$$

Discutons cette équation; nous observerons d'abord que ses coefficients ne sont pas réels, ou du moins A , C , C' sont réels, mais B et B' sont imaginaires conjugués; l'équation ne change pas quand

on change y en $\frac{1}{y}$ et i en $-i$. Les racines peuvent donc se répartir en deux paires :

$$\alpha = 1 E^{i\omega}, \quad \beta = 1 E^{i\omega'},$$

où α et β sont réels et plus petits que 1, de telle sorte qu'on permute les deux racines d'une même paire en changeant y en $\frac{1}{y}$ et i en $-i$. De plus,

$$C = C' = \frac{\alpha'^2 e'^2}{4},$$

de sorte que le produit des racines est égal à $+1$, ce qui donne

$$\omega' = -\omega.$$

Il en résulte que nous pouvons mettre Δ^2 sous la forme d'un produit de deux facteurs :

$$\Delta^2 = H^2 [1 - 2\alpha \cos(u' - \omega) + \alpha^2] [1 - 2\beta \cos(u' + \omega) + \beta^2],$$

H étant facile à calculer quand on connaît α , β et ω .

Nous remarquerons ensuite que, si l'on néglige e'^2 , le degré de l'équation s'abaisse, car C et C' s'annulent et l'équation (11) devient simplement

$$A + By + \frac{B'}{y} = 0.$$

L'équation du quatrième degré se réduit donc au deuxième, une des racines étant devenue nulle et l'autre infinie. L'équation se résout donc aisément pour $C = C' = 0$. Nous pouvons ensuite développer les racines suivant les puissances de C , en considérant A , B , B' et C comme des variables indépendantes et faisant $C' = C$. Comme C est du deuxième degré par rapport aux excentricités, la convergence sera très rapide. Nous voyons en même temps que β est une quantité du deuxième degré par rapport aux excentricités.

Il reste à effectuer le développement de $\frac{1}{\Delta}$ et pour cela on développera les deux facteurs

$$[1 - 2\alpha \cos(u' - \omega) + \alpha^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum c_p E^{ip u'},$$

$$[1 - 2\beta \cos(u' + \omega) + \beta^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum c'_q E^{iq u'}.$$

On aura ensuite le coefficient $B_{n'}$ en faisant le produit des deux séries: on trouve ainsi

$$(12) \quad B_{n'} = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_p c_p c'_{n'-p}.$$

Les quantités

$$c_p E^{ip\omega}, \quad c'_q E^{-iq\omega}$$

ne sont pas autre chose que les coefficients de Laplace

$$b_{\frac{1}{2}}^{(p)}, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(q)},$$

calculés respectivement en prenant $\alpha = \alpha$ et $\alpha = \beta$. On les déterminera par les procédés du Chapitre XVII. Cauchy préfère employer, pour cette détermination, les séries procédant suivant les puissances de $\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$ (ou de $\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$) particulièrement commodes dans le cas où p (ou q) sont grands, ce qui est le cas où il est placé.

Quant à la série

$$\sum c_p c'_{n'-p},$$

elle converge très rapidement à cause de la petitesse de β ; en effet, le développement de $c'_{n'-p}$ suivant les puissances de β commence par un terme en $\beta^{|n'-p|}$, donc $c'_{n'-p}$ est du degré $2|n'-p|$ par rapport aux excentricités et est par conséquent très petit.

Ayant calculé ainsi $B_{n'}$ par la formule (12), Cauchy aurait pu obtenir ensuite $B_{nn'}$ par la formule (10) et en déduire ensuite $A_{nn'}$ par la formule (12) du Chapitre XVI. Mais ce n'est pas tout à fait comme cela qu'il opère, il passe par l'intermédiaire d'un développement mixte procédant suivant l'anomalie excentrique u' et l'anomalie moyenne l :

$$\frac{1}{\Delta} = \sum C_{nn'} E^{i(nl+n'u')},$$

de sorte que

$$B_{n'} = \sum C_{nn'} E^{inl},$$

$$2\pi C_{nn'} = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inl} dl = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inl} (1 - e \cos u) du.$$

Cauchy calcule $C_{nn'}$ à l'aide de cette dernière formule et pour cela il applique les quadratures mécaniques, c'est-à-dire qu'il prend (K étant un entier suffisamment grand)

$$KC_{nn'} = \sum B_{n'} E^{-inl} (1 - e \cos u).$$

$B_{n'}$ et E^{-inl} sont des fonctions de u ; on donne à u sous le signe \sum les K valeurs équidistantes

$$0, \quad \frac{2\pi}{K}, \quad \dots, \quad \frac{2(K-1)\pi}{K}.$$

On calcule enfin $A_{nn'}$ à l'aide de la formule

$$A_{nn'} = \sum \frac{p'}{n'} C_{p,p'} J_{n'-p'}(n' e'),$$

analogue à la formule (12) du Chapitre XVI. Cauchy a appliqué cette méthode au calcul de la grande inégalité Pallas-Jupiter, en faisant $n = -18$, $n' = 7$, il n'avait donc à calculer que les fonctions de Bessel de l'argument unique $7e'$.

Je renverrai pour plus de détails à la *Mécanique céleste* de Tisserand, t. IV, Chap. XVII.

304. On pourrait évidemment fonder d'autres méthodes analogues sur les propriétés des fonctions elliptiques et sur l'emploi de formules, telles que celles dont nous avons fait usage au n° 256. Je me bornerai à cet égard à quelques indications sommaires. Supposons d'abord les excentricités nulles et que nous ayons à calculer, par exemple, l'intégrale

$$(13) \quad \int \int \frac{dz \, d\omega \, z^{-h} \, \omega^{-1}}{\sqrt{A + B \left(z + \frac{1}{z} \right) + C \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right)}},$$

où $A = a^2 + a'^2$, $B = aa'\nu$, $C = aa'\mu$. Intégrons d'abord par rapport à ω ; nous avons une intégrale elliptique que nous pouvons prendre par le procédé de la moyenne arithmético-géométrique. Ce procédé est fondé sur l'égalité

$$\int \frac{d\omega \, \omega^{-1}}{\sqrt{a + b \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right)}} = \int \frac{d\omega \, \omega^{-1}}{\sqrt{a' + b' \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right)}},$$

qui a lieu quand

$$\sqrt{a+2b} = \alpha, \quad \sqrt{a-2b} = \beta; \quad \sqrt{a'+2b'} = \alpha' = \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \sqrt{a'-2b'} = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Si nous prenons l'intégrale qui donne le coefficient de Laplace

$$2i\pi b_{\frac{1}{2}}^0 = \int \frac{dw w^{-1}}{\sqrt{1+\alpha^2-\alpha\left(w+\frac{1}{w}\right)}},$$

les quantités qui jouent le rôle de $\sqrt{a+2b}$ sont

$$1+\alpha, \quad 1-\alpha;$$

en prenant les moyennes arithmétique et géométrique, on trouve

$$1, \quad \sqrt{1-\alpha^2};$$

en faisant une seconde fois la même opération,

$$\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}, \quad \sqrt[4]{1-\alpha^2};$$

une troisième fois,

$$\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{2}\right)^2, \quad \dots,$$

d'où

$$2i\pi b_{\frac{1}{2}}^0 = \int \frac{dw w^{-1}}{\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{2}\right)^2}$$

ou

$$\sqrt{b_{\frac{1}{2}}^0} = \frac{2}{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}},$$

ce qui est la formule du Chapitre XVII; nous avons vu quelle approximation donne cette formule quand α est plus petit que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Appliquons la même méthode à l'intégrale (13). Nous pouvons la mettre sous la forme

$$\iint \frac{z^{-h} w^{-1} dz dw}{\sqrt{a^2+a'^2+aa'\left(w+\frac{1}{w}\right)}},$$

en posant

$$A + B \left(z - \frac{1}{z} \right) \pm 2C = (a \pm a')^2 = a'^2 (1 \pm z)^2,$$

en posant

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \sqrt{\frac{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)-2C}{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)+2C}},$$

$$2a' = \sqrt{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)+2C} + \sqrt{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)-2C}.$$

Notre intégrale, par l'application de la règle précédente, se réduira donc à l'intégrale simple

$$\int \frac{8i\pi z^{-h} dz}{a'(1+\sqrt[4]{1-\alpha^2})^2},$$

où a' et α sont des fonctions de z définies par les formules précédentes et que l'on pourra calculer par quadratures mécaniques, ou mieux de la manière suivante :

Comme B est très petit de l'ordre du carré de l'inclinaison, on pourra développer la fonction sous le signe \int suivant les puissances de $B\left(z + \frac{1}{z}\right)$, ce qui nous donnera en même temps le développement de cette fonction suivant les puissances entières positives et négatives de z .

305. On pourrait faire quelque chose d'analogue dans le cas général; il s'agit toujours de calculer l'intégrale

$$\iint \frac{dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}.$$

On commencera par exemple par intégrer par rapport à y ; l'intégrale à calculer est alors une intégrale elliptique que je puis écrire

$$\int \frac{A y^{-m'} dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}},$$

et il faut calculer l'une des périodes de cette intégrale elliptique.

Seulement $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions de x . Quand e' est nul, une des quatre racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est nulle et une autre infinie. On est donc ramené au calcul de l'intégrale

$$(14) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x(x-\gamma)(x-\delta)}}.$$

Le calcul des racines γ et δ est alors immédiat et l'on peut appliquer directement les procédés du Chapitre XVII et en particulier ceux du n° 256. Toutes les intégrales peuvent d'ailleurs se déduire de deux d'entre elles par les relations de récurrence du Chapitre XVII.

Si e' n'est pas nul, le cas est plus compliqué; il faut d'abord déterminer les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; nous avons expliqué au n° 303 comment cela pouvait se faire, grâce à la petitesse de e' . D'autre part, nous n'avons plus comme au Chapitre XVII à calculer l'intégrale

$$\int (p - e_3)^m du,$$

mais l'intégrale plus compliquée

$$(15) \quad \int \left(\frac{p-a}{p-b} \right)^m du,$$

où a et b sont des constantes et m un entier positif ou négatif. Et en effet, pour ramener l'intégrale (14) à la forme canonique, il faut poser

$$x = \frac{p-a}{p-b},$$

$p(u)$ étant la fonction de Weierstrass.

La période de l'intégrale (15) dépend de celles des quatre intégrales suivantes :

$$\int du, \quad \int \zeta'(u \pm u_0) du, \quad \int [\zeta(u + u_0) - \zeta(u - u_0)] du, \\ \int [\zeta(u + u_1) - \zeta(u - u_1)] du,$$

u_0 et u_1 étant définis par les équations

$$p(u_0) = a; \quad p(u_1) = b.$$

On s'en assurerait en décomposant la fonction doublement périodique $\left(\frac{p-a}{p-b}\right)^m$ en éléments simples.

Or ces quatre intégrales ont pour périodes

$$2\omega_1, \quad 2\tau_1, \quad 4\tau_1 u_0, \quad 4\tau_1 u_1.$$

On a vu au n° 256 comment on pouvait calculer ω_1 et τ_1 ; on trouvera dans l'excellent ouvrage de M. Schwarz (*Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, d'après les leçons de Weierstrass, Paris, Gauthier-Villars, 1894) des formules tout aussi convergentes pour le calcul de u_0 et de u_1 (pages 67 à 73).

On voit qu'ici les formules de récurrence permettent d'exprimer toutes les intégrales en fonction non plus de 2, mais de 4 d'entre elles.

D'autre part $2\omega_1, 2\tau_1, 4\tau_1 u_0, 4\tau_1 u_1$ ne sont plus ici des constantes, mais des fonctions de x , et il faut maintenant les développer suivant les puissances entières, positives et négatives de x . Ce développement peut se faire, soit par quadrature mécanique, soit par des procédés analytiques ainsi que je l'ai expliqué à la fin du numéro précédent.

Nous remarquerons qu'il est préférable de faire la première intégration en prenant pour variable non pas y comme nous l'avons fait plus haut, mais $\frac{y}{x}$; il arrive alors que nos quantités ω_1, τ_1 , etc. varient peu quand on fait varier x , les variations étant de l'ordre des excentricités.

306. Seulement ce n'est pas la fonction perturbatrice elle-même qui figure dans les équations différentielles du mouvement; ce sont les dérivées partielles de cette fonction si l'on emploie la méthode de la variation des constantes; ce sont les composantes de la force perturbatrice avec d'autres méthodes.

Si nous avons les coefficients de développement de la fonction perturbatrice sous la forme analytique, il serait aisé d'en déduire les coefficients correspondants dans le développement des dérivées partielles, ou des composantes de la force. Mais il n'en est plus de même si nous possédons seulement la valeur numérique de ces

coefficients, et c'est là tout ce que nous donnent les méthodes exposées dans le présent Chapitre. Cela nous oblige à examiner la question à ce point de vue nouveau.

Pas de difficulté en ce qui concerne la dérivée partielle suivant l'une des anomalies moyennes l ou l' . Si l'on a

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A_{mm'} E^{i(m l + m' l')},$$

on trouve immédiatement

$$\frac{d}{dl} \frac{1}{\Delta} = \sum i m A_{mm'} E^{i(m l + m' l')}.$$

Pour les autres dérivées partielles, il s'agit (α étant l'un quelconque des éléments) de calculer

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\Delta} = \frac{P}{\Delta^3}$$

où

$$P = -\frac{1}{2} \frac{d\Delta^2}{d\alpha}.$$

Si l'on veut les composantes de la force suivant trois axes rectangulaires, on aura à développer

$$\frac{\xi - \xi'}{\Delta^3}, \quad \frac{\eta - \eta'}{\Delta^3}, \quad \frac{\zeta - \zeta'}{\Delta^3},$$

en désignant par $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ les coordonnées rectangulaires des deux planètes.

Dans la méthode de Hansen (*voir* Tisserand, t. IV, Chap. XXI, p. 341) on considère les composantes de la force suivant trois axes particuliers et l'on est amené à envisager les combinaisons

$$\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \xi'^2 - \eta'^2 - \zeta'^2}{\Delta^3}, \quad \frac{\zeta - \zeta'}{\Delta^3}.$$

Dans tous les cas, il s'agit de développer une expression de la forme $\frac{P}{\Delta^3}$, et $\frac{1}{\Delta}$ est encore de la même forme en faisant $P = \Delta^2$. Ce qui nous intéresse c'est que, quand on développe P suivant les anomalies excentriques, c'est-à-dire suivant les puissances entières, positives et négatives de x et de y , ce développement ne contiendra qu'un nombre fini de termes.

Cela est vrai des coordonnées $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ et par conséquent

de leurs combinaisons

$$\xi - \xi', \quad \tau_i - \tau'_i, \quad \zeta - \zeta', \quad \sum \xi^2 - \sum \xi'^2.$$

Cela est vrai de Δ^2 et par conséquent de $\frac{d\Delta^2}{dx}$.

Il faudra donc opérer de la façon suivante :

1° On développera $\frac{1}{\Delta^3}$ suivant les anomalies excentriques. Les méthodes des numéros précédents qui visaient particulièrement $\frac{1}{\Delta}$ s'appliquent sans changement à $\frac{1}{\Delta^2}$ et en particulier à $\frac{1}{\Delta^3}$.

2° On multipliera le développement de $\frac{1}{\Delta^3}$ par celui de P.

Ce dernier développement se réduisant à un nombre fini de termes, cette multiplication ne présente aucune difficulté.

3° On passera du développement de $\frac{P}{\Delta^3}$ suivant les anomalies excentriques à celui de cette même quantité suivant les anomalies moyennes à l'aide de la formule (12) du Chapitre XVI.

Une dernière observation toutefois. Les dérivées $\frac{d}{dx} \frac{1}{\Delta}$, $\frac{\partial \Delta^2}{\partial x}$ dont nous venons de parler et que l'on rencontre dans la méthode de la variation des constantes, sont les dérivées prises par rapport à un système de variables parmi lesquelles figurent les anomalies moyennes.

Désignons au contraire par $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, avec des ∂ ronds, les dérivées prises par rapport à un système de variables parmi lesquelles figurent les anomalies excentriques. Nous avons immédiatement Δ^2 et il est aisé d'en déduire $\frac{\partial \Delta^2}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\Delta}$; mais ce qu'il nous faut c'est $\frac{d}{dx} \frac{1}{\Delta}$. Tout d'abord, si l'élément α n'est pas l'une des deux excentricités e ou e' , on a simplement

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\Delta} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Delta}.$$

Si $\alpha = e$, $l = u - e \sin u$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{\Delta} = \frac{d}{de} \frac{1}{\Delta} + \frac{d}{dl} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial l}{\partial e} = \frac{d}{de} \frac{1}{\Delta} + \sin u \frac{d}{dl} \frac{1}{\Delta}.$$

Nous connaissons le développement de $\frac{1}{\Delta}$ et de $\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{\Delta}$. Il reste donc à trouver celui de $\sin u \frac{d}{dl} \frac{1}{\Delta}$.

Soit donc

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{pp'} E^{i(pu-p'u)} = \sum A_{mm'} E^{i(mt+m'l')}$$

avec

$$A_{mm'} = \sum C A_{pp'}; \quad C = \frac{pp'}{mm'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e'),$$

il viendra

$$\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{\Delta} = \sum \frac{\partial B_{pp'}}{\partial e} E^{i(pu+p'u')} = \sum D_{mm'} E^{i(mt+m'l')}$$

avec

$$D_{mm'} = \sum C \frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}.$$

D'autre part

$$\frac{d}{de} \frac{1}{\Delta} = \sum \frac{dA_{mm'}}{de} E^{i(mt+m'l')}$$

avec

$$\frac{dA_{mm'}}{de} = \sum C \frac{\partial B_{pp'}}{\partial e} + \sum B_{pp'} \frac{dC}{de}.$$

Il reste donc

$$\sin u \frac{d}{dl} \frac{1}{\Delta} = \sum G_{mm'} E^{i(mt+m'l')}$$

avec

$$G_{mm'} = \sum B_{pp'} \frac{dC}{de}.$$

et

$$\frac{dC}{de} = \frac{pp'}{m'} J'_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e').$$

La formule précédente est analogue à la formule (12) du Chapitre XVI. Nous connaissons $B_{pp'}$ et $\frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}$; les formules précédentes nous permettent d'en déduire $A_{mm'}$, $D_{mm'}$, $G_{mm'}$ et par conséquent le développement de $\frac{d}{de} \frac{1}{\Delta}$ suivant les anomalies moyennes.



CHAPITRE XXIII.

TERMES D'ORDRE ÉLEVÉ.

307. On peut être amené à rechercher une valeur approchée du coefficient $A_{mm'}$ quand m et m' sont des entiers très grands en valeur absolue et cela pour deux raisons :

1° On peut se rendre compte ainsi de la rapidité de la convergence des séries;

2° Un terme d'ordre élevé $A_{mm'}$ peut donner lieu à une perturbation notable si, le rapport des moyens mouvements n et n' étant sensiblement commensurable, le diviseur $mn + m'n'$ devient très petit. Le coefficient de la perturbation de la longitude est alors de l'ordre de

$$\frac{A_{mm'}}{(mn + m'n')^2},$$

et il convient alors de calculer le coefficient $A_{mm'}$ sans avoir besoin des coefficients précédents. Le plus souvent, une fois ce calcul terminé, on reconnaîtra qu'il était inutile, parce que la valeur trouvée pour $A_{mm'}$ est trop petite. Il y a donc intérêt à se faire d'avance une idée de l'ordre de grandeur de ces coefficients, et même à pouvoir en trouver rapidement une valeur approchée. C'est ce but qu'on peut espérer atteindre par l'emploi de la méthode de M. Darboux pour le calcul des fonctions de très grands nombres. Cette méthode repose sur les principes suivants :

1° Si une série

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n$$

est convergente dans un cercle de rayon ρ' , et que sur la circonférence de ce cercle elle possède un point singulier z_0 , tel que dans le voisinage de ce point la fonction $\varphi(z)$ soit développable suivant

les puissances entières, *réelles croissantes* et d'ailleurs fractionnaires ou même incommensurables, positives ou négatives, de $1 - \frac{z}{z_0}$, de telle façon que le premier terme du développement dont l'exposant ne soit pas entier soit

$$A \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-s},$$

on aura approximativement pour n très grand

$$a_n = \frac{A}{z_0^n} \frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)};$$

2° Si le point singulier est logarithmique, c'est-à-dire si $\varphi(z)$ est de la forme

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \log\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \varphi_2(z),$$

$\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ étant développables suivant les puissances réelles et croissantes de $1 - \frac{z}{z_0}$, il faudra opérer de la façon suivante. Soient s_1 et s_2 les exposants du premier terme du développement de φ_1 et de φ_2 dont l'exposant n'est pas entier. Soit s_0 l'exposant du premier terme de φ_2 , les exposants entiers n'étant pas exclus. Si $s_1 < s_0$, on pourra appliquer la formule précédente en changeant s en s_1 . Si $s_1 \geq s_0$, il faudra envisager le premier terme de φ_2

$$A_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-s_0}.$$

Si s_0 n'est pas entier négatif, on a approximativement

$$a_n = \frac{A_0}{z_0^n} \frac{n^{s_0-1} \log n}{\Gamma(s_0)},$$

et, si s_0 est entier négatif ou nul,

$$a_n = \frac{A_0}{z_0^n} (-1)^{s_0+1} \Gamma(1-s_0) n^{s_0-1};$$

3° Si la fonction $\varphi(z)$ présente plusieurs points singuliers sur la circonférence du cercle de convergence, la valeur approximative de a_n sera la somme des valeurs approximatives partielles que l'on obtiendrait en considérant isolément les divers points singuliers;

4° Supposons que $\varphi(z)$ soit de la forme

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n + \sum b_n z^{-n},$$

et que cette série double converge dans une couronne comprise entre les deux cercles $|z| = \rho_1$, $|z| = \rho_0$, $\rho_1 > \rho_0$. Alors la série $\sum a_n z^n$ convergera pour $|z| < \rho_1$ et ne présentera aucun point singulier sur le cercle $|z| = \rho_0$ ni à l'intérieur. Au contraire la série $\sum b_n z^{-n}$ convergera pour $|z| > \rho_0$ et ne présentera aucun point singulier sur le cercle $|z| = \rho_1$ ni à l'extérieur. La valeur asymptotique de a_n s'obtiendra d'après les règles précédentes en envisageant les points singuliers de $\varphi(z)$ sur le cercle $|z| = \rho_1$; celle de b_n s'obtiendra d'après les mêmes règles en envisageant les points singuliers de $\varphi(z)$, ou plutôt de $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ sur le cercle $|z| = \rho_0$.

308. Comment ces principes peuvent-ils s'appliquer au problème qui nous occupe? Il semble d'abord qu'ils sont faits uniquement pour les fonctions d'une seule variable. Aussi M. Flamme a-t-il commencé par décomposer le terme à évaluer en une somme dont chaque élément était le produit de deux facteurs dépendant chacun d'une seule variable, qui était l'anomalie moyenne de la première planète pour le premier facteur et celle de la seconde pour le second facteur.

Mais on peut opérer d'une autre manière. Soit

$$(1) \quad m = an + b, \quad m' = cn + d,$$

a, b, c, d sont des entiers finis et donnés une fois pour toutes; n est un entier très grand; a et c sont premiers entre eux. Il faut calculer

$$A_{mm'} = A_{an+b, cn+d}.$$

Nous avons

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int \frac{E\Omega Q dx dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}},$$

avec

$$\Omega = \frac{me}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{m'e'}{2} \left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \left[1 - \frac{e'}{2} \left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Soit

$$\Omega = n\Omega_0 + \Omega_1,$$

$$\Omega_0 = \frac{ae}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \frac{ce'}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right),$$

$$\Omega_1 = \frac{be}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{de'}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right).$$

Notre intégrale deviendra

$$(2) \quad \iint \left(\frac{E\Omega_0}{x^a y^c} \right)^n \frac{E\Omega_1 Q dx dy}{x^b y^d \sqrt{R(x, y)}}.$$

Considérons la fonction auxiliaire

$$\Phi(z) = -4\pi^2 \sum z^n A_{mm'}.$$

Sous le signe \sum nous ne donnons pas à m et m' toutes les valeurs, mais seulement celles qui sont de la forme (1); mais nous pouvons encore opérer de deux manières :

1° Nous pouvons donner à n toutes les valeurs entières positives, outre la valeur zéro; nous obtenons ainsi l'intégrale de Féraud

$$(3) \quad \Phi(z) = \iint \frac{E\Omega_1 Q dx dy}{\left(1 - \frac{z E\Omega_0}{x^a y^c} \right) x^b y^d \sqrt{R}};$$

2° Nous pouvons donner à n toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles; la fonction $\Phi(z)$ peut alors se mettre sous la forme d'une intégrale simple. Nous pouvons trouver deux entiers α et γ tels que

$$\alpha\alpha + c\gamma = 1,$$

puisque a et c sont premiers entre eux. Posons alors

$$Eit = z^\alpha t^{-c}, \quad Eit' = z^\gamma t^a.$$

Nous avons le développement

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')} = \sum A_{mm'} z^{\alpha m + \beta m'} t^{\alpha m' - cm}.$$

Considérons alors l'intégrale simple

$$(4) \quad \int \frac{1}{\Delta} t^{bc-ad-1} z^{-(xb+\gamma d)} dt$$

prise le long de la circonférence $|t|=1$. Cette intégrale peut s'écrire

$$\sum A_{mm'} z^\lambda \int t^\mu dt,$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha(m-b) + \beta(m'-d), \\ \mu &= \alpha(m'-d) - c(m-b) - 1. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int t^\mu dt$ est nulle à moins que $\mu = -1$ et alors elle est égale à $2i\pi$; pour que $\mu = -1$, il faut que m et m' soient de la forme (1); mais alors on a $\lambda = n$; de sorte que l'intégrale (4) se réduit à

$$2i\pi \sum A_{mm'} z^n = \frac{1}{2i\pi} \Phi(z).$$

Ainsi, pour résoudre le problème qui nous occupe, nous n'avons qu'à rechercher la position et la nature des points singuliers de la fonction $\Phi(z)$, et pour éviter toute confusion nous distinguerons la fonction $\Phi_1(z)$ de M. Féraud définie par l'intégrale double (3) et la fonction $\Phi_2(z)$ définie par l'intégrale simple (4).

309. Appliquons ces principes au calcul des coefficients de Laplace qui sont donnés par la formule

$$2i\pi b_s^{(k)} = \int F^{-s} z^{k-1} dz,$$

avec

$$F = (1 - \alpha z) \left(1 - \frac{\alpha}{z} \right).$$

Considérons d'abord s comme fixe et faisons croître k , il s'agit de trouver le coefficient de z^k dans le développement de F

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s} \left(1 - \frac{\alpha}{z} \right)^{-s}.$$

Cette fonction présente deux points singuliers, l'un sur le cercle extérieur à la couronne de convergence, $z = \frac{1}{\alpha}$, l'autre sur le

cercle intérieur, $z = \alpha$; si nous supposons k positif et très grand, c'est le premier qu'il faut considérer.

Dans le voisinage de ce point, on a sensiblement

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha^2)^{-s},$$

ce qui nous donne asymptotiquement

$$b_s^{(k)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \alpha^k (1 - \alpha^2)^{-s} k^{-s}.$$

Supposons maintenant k fixe et s très grand; soit

$$s = n + \frac{1}{2}.$$

Alors $2i\pi b_s^{(k)}$ sera le coefficient de β^n dans le développement de l'intégrale

$$\int \frac{z^{k-1} dz}{\left(1 - \frac{\beta}{F}\right) \sqrt{F}}.$$

Les points singuliers de la fonction sous le signe \int nous sont donnés par

$$F = 0, \quad F = \beta.$$

Il faut ou que ces deux équations aient une racine commune, ce qui donnerait $\beta = 0$, solution à rejeter, ou que l'une d'elles ait une racine double. Nous pouvons exclure la première qui ne dépend pas de β ; il reste la seconde, qui a une racine double si

$$z = \pm 1, \quad \beta = (1 \pm \alpha)^2.$$

La racine qui convient c'est $(1 - \alpha)^2$.

Quelle est la nature de ce point singulier? Pour β très voisin de $(1 - \alpha)^2$, les parties les plus importantes de l'intégrale seront celles qui correspondent aux valeurs de z voisines de 1. On a alors sensiblement $z = 1$, $\sqrt{F} = 1 - \alpha$, de sorte que l'intégrale s'écrira sensiblement

$$\int \frac{(1 - \alpha) dz}{1 + \alpha^2 - \beta - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right)}.$$

La fonction sous le signe \int est une fonction rationnelle dont il

faut obtenir le résidu; or ce résidu est

$$\frac{1-\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)},$$

α étant donné par l'équation

$$1+\alpha^2-\beta=\alpha\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Mais cette équation donne sensiblement

$$\alpha=1\pm\sqrt{\frac{(1-\alpha)^2-\beta}{\alpha}},$$

$$\frac{1}{\alpha^2}=1\pm 2\sqrt{\frac{(1-\alpha)^2-\beta}{\alpha}}.$$

Le résidu est donc

$$\frac{(1-\alpha)\sqrt{\alpha}}{2\alpha\sqrt{(1-\alpha)^2-\beta}},$$

et l'intégrale est égale à ce résidu multiplié par $2i\pi$. Donc $b_s^{(k)}$ est le coefficient de β^n dans le développement de

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[1-\frac{\beta}{(1-\alpha)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}(1-\alpha)^{2s-1}}\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

formule qui, on le remarquera, est indépendante de k .

310. La détermination des points singuliers de la fonction $\Phi(\alpha)$ ne présente pas de difficulté; on n'a qu'à appliquer aux intégrales (3) et (4) les procédés du n° 282. Pas de difficulté non plus en ce qui concerne la nature de ces points singuliers, je me bornerai à renvoyer aux *Méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 322.

La difficulté provient de ce fait que tous les points singuliers ne conviennent pas et n'appartiennent pas à la branche considérée de la fonction $\Phi(\alpha)$. Nous avons vu en effet aux n°s 282 et 283 quelle

est la condition pour qu'une singularité de la fonction $\Phi(z)$ convienne. Cette singularité se présente quand deux points singuliers de la fonction sous le signe \int se confondent et, pour que la singularité convienne, il faut que ces deux points singuliers soient, avant de se confondre, de part et d'autre du contour d'intégration.

Les points singuliers qui conviennent sont dits *admissibles* et il nous faut choisir, si nous adoptons l'intégrale (3), celui des points singuliers admissibles dont le module est le plus petit, et, si nous adoptons l'intégrale (4), celui des points singuliers admissibles dont le module est le plus voisin de 1.

La discussion pour reconnaître l'admissibilité des points singuliers est assez délicate et a été jusqu'ici le principal obstacle à l'emploi de cette méthode. J'ai indiqué dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* les principes généraux qui permettent de faire cette discussion. Mais je n'ai appliqué ces principes qu'au cas où l'inclinaison est nulle, l'une des excentricités nulle et l'autre très petite. M. Hamy, dans le *Journal de Liouville* (1894 et 1896), a traité le même problème sans s'astreindre à la troisième condition. M. Coculesco, dans sa thèse, 1895, s'est occupé du cas où l'inclinaison est nulle, les deux excentricités petites et différentes de *zéro* et où la longitude du périhélie est la même. Enfin M. Féraud, dans sa thèse, 1897, a traité le cas où l'inclinaison est finie et les deux excentricités nulles; il a d'ailleurs retrouvé les résultats de M. Hamy.

Il semble d'abord que la discussion doive être plus facile avec l'intégrale simple (4) qu'avec l'intégrale double (3); il n'en est rien, à moins que l'une des deux excentricités ne soit nulle, parce que la fonction sous le signe \int n'est pas une fonction uniforme de t , mais possède une infinité de déterminations, de sorte que la discussion ne pourrait se faire que par la considération d'une surface de Riemann à une infinité de feuillets. Aussi, M. Féraud, en introduisant l'intégrale (3), a-t-il réalisé un sérieux progrès. Mais il faudrait faciliter la discussion des intégrales doubles et pour cela étudier les propriétés de leurs périodes. Nous avons déjà vu aux Chapitres XX et XXI l'importance que pourrait avoir cette étude.

Si, au lieu d'envisager le développement suivant les anomalies

moyennes, on envisageait le développement suivant les anomalies excentriques, le problème serait considérablement simplifié. On reconnaîtrait, par exemple, que la fonction $\Phi(\varpi)$ satisfait à une équation différentielle linéaire à second membre dont les coefficients et le second membre sont des fonctions rationnelles de ϖ .

Je n'insisterai pas davantage sur cette question, me bornant à renvoyer aux Mémoires cités et en particulier au Chapitre VI des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
CHAPITRE XIV. — Le problème de la fonction perturbatrice.....	1
CHAPITRE XV. — Application des fonctions de Bessel	14
CHAPITRE XVI. — Propriétés générales de la fonction perturbatrice.....	34
CHAPITRE XVII. — Les coefficients de Laplace.....	49
CHAPITRE XVIII. — Les polynomes de Tisserand.....	65
CHAPITRE XIX. — Les opérateurs de Newcomb.....	86
CHAPITRE XX. — Convergence des séries.....	100
CHAPITRE XXI. — Relations de récurrence et équations différentielles	119
CHAPITRE XXII. — Calcul numérique des coefficients.. ..	140
CHAPITRE XXIII. — Termes d'ordre élevé.....	157

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME II.

38111 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins 55.



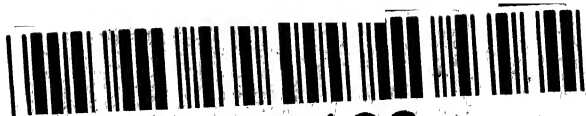
3 8482 00411 8242

FEB 23 1988

521.4 P75L v.2 pt.1 c.1
Poincare, Henri,
Lecons de mecanique celeste

University Libraries
Carnegie-Mellon University
Pittsburgh, Pennsylvania 15213

UNIVERSAL
LIBRARY



138 138

UNIVERSAL
LIBRARY